Quadratische Gleichungen - LÖSUNG **Jgst 10**

(Stichwörter: Quadr. Ergänzung; Lösungsformel; Faktorisieren; Ausklammern; Bin. Formeln; Nullstellen)

1. Löse durch Faktorisieren

Beispiel: $3x^2 + 0{,}75 = -3x \quad \Leftrightarrow 3(x^2 + x + 0{,}25) = 0 \quad \Leftrightarrow 3(x + 0{,}5)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$ x=-0,5

a) $4y - y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow (y-2)^2 = 0 \Leftrightarrow y_{1/2} = 2$

b) $5x^2 + 25x = 0 \Leftrightarrow 5x(x+5) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0; \quad x_2 = -5$

c) $3s = -4{,}5 - 0{,}5s^2 \Leftrightarrow 0{,}5s^2 + 3s + 4{,}5 = 0 \quad |:0{,}5 \Leftrightarrow s^2 + 6s + 9 = 0 \Leftrightarrow (s+3)^2 = 0 \Leftrightarrow s_{1/2} = -3$

d) $18y^2 - 162 = 0 \quad |:18 \Leftrightarrow y^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (y+3)(y-3) = 0 \Leftrightarrow y_1 = 3; \quad y_2 = -3$

2. Löse mittels quadratischer Ergänzung

Beispiel: $3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow x - 1 = \pm 2$

$\Leftrightarrow x_1 = 3; x_2 = -1$

a) keine quadr. Ergänzung nötig: $2y = \frac{1}{3}y^2 + 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3}y^2 - 2y + 3 = 0 \quad |\cdot 3 \Leftrightarrow y^2 - 6y + 9 = 0$

$\Leftrightarrow (y-3)^2 = 0 \Leftrightarrow y_{1/2} = 3$y

b) $5x^2 + 5x = 5 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$

c) $3y + 2y^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow y^2 + \frac{3}{2}y + 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 2\cdot\frac{3}{4}y + \frac{9}{4} - \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow (y + \frac{3}{4})^2 - \frac{5}{4} = 0$

$\Leftrightarrow y_{1/2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{3}{4}$

3. Löse (falls möglich) mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen

Beispiel: $x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 2}}{2} \Leftrightarrow$ keine Lösung, da D<0

a) $3x^2 - 6x - 5 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot 3\cdot(-5)}}{2\cdot 3} \Leftrightarrow x_{1/2} = 1 \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}$

b) $2z^2 = z + 1 \Leftrightarrow z_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2} \Leftrightarrow z_{1/2} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$

c) Besser faktorisieren: $-3y - y^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow y^2 + 3y = 0 \Leftrightarrow y_1 = 0; \quad y_2 = -3$

4. Berechne für die folgenden Funktionen die Nullstellen und die Stellen, an denen der Funktionswert 2 angenommen wird. Zeichne die Graphen der Funktionen in ein Koordinatensystem.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 6$; *siehe unten*

b) $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1{,}5$; *f(x)* = 0 hat keine Lösung, da D<0; *f(x)* = 2 hat die Lösungen $x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{2}$

c) $h(x) = -x^2 + 5x - 4$; *f(x)*=0 hat die Lösungen $x_1 = 4; \quad x_2 = 1$; *f(x)* = 2 hat die Lösung $x_{1/2} = 2{,}5$

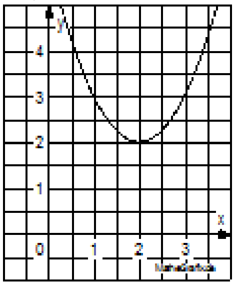
Beispiel:

Lösung zu a) $x^2 - 4x + 6 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 1\cdot 6}}{2} = keine \quad Lösung$

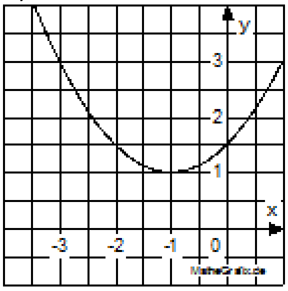
$$x^2 - 4x + 6 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2$$

Graphen der Funktionen:

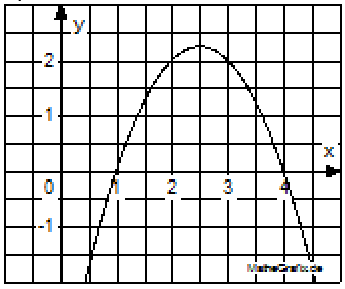
a)



b)

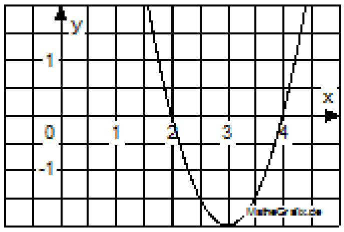


c)



5. Berechne möglichst geschickt die Lösungen der folgenden Gleichungen. Überprüfe deine Ergebnisse graphisch, z. B. mit Hilfe eines Funktionsplotters.

Beispiel: $2x^2 + 16 = 12x \Leftrightarrow$ Bestimmung der Nullstellen der Funktion $f(x) = 2x^2 - 12x + 16$ (Graph siehe Diagramm) $\Leftrightarrow 2(x^2 - 6x + 8) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2 \wedge x_2 = 4$



a) $2 = (3 + x)^2 \Leftrightarrow 3 + x = \pm\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{2}$

b) $-x^2 - 2 = 0{,}25 + 9x \Leftrightarrow x_{1/2} = -4{,}5 \pm 3\sqrt{2}$

c) $2x + x + 16 = 0 \Leftrightarrow x = -5\tfrac{1}{3}$

d) $(x-3)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3; \quad x_2 = -2$

e) $x^2 - x = x - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow x_1 = 0; \quad x_2 = 1$

6. Gib jeweils eine quadratische Gleichung mit der angegebenen Eigenschaft an:

a) Die Gleichung hat nur die Lösung –2. z.B. $(x+2)^2$

b) Die Gleichung hat keine Lösungen. z.B. $x^2+x+1=0$

c) Die Gleichung hat die Lösungen –2 und 2. z.B. $(x+2)(x-2)=0$

d) Die Gleichung hat die Lösungen –1 und –3. z.B. $(x+1)(x+3)=0$

Beispiel: Lösung zu a) $(x+2)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 4x + 4 = 0$