Graphen quadratischer Funktionen - Lösungen   Jgst 10-2

(Stichwörter: Parabel; Scheitelform, Lösungsformel; Faktorisieren; Bin. Formeln; Nullstellen…)

1. Parabel oder Hyperbel

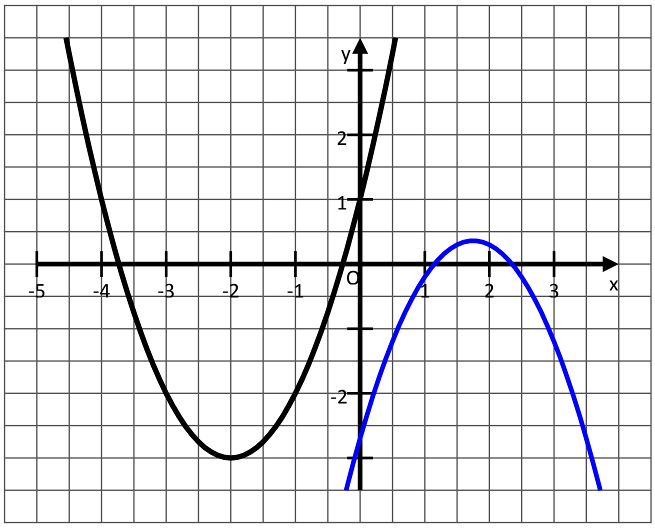
Welche der folgenden Funktionsterme besitzen als Graph eine Parabel und welche eine Hyperbel?

Parabeln: $2x^2$ $-2x(x+1)$

Hyperbeln: $\frac{1}{x}$ $\frac{1}{x^2}$ $\frac{1}{x+2}$

Sonst: Gerade: $2x$ gebrochen-rationale Funktion: $-\frac{x^2}{x+1}$

2. Arbeite mit Wertetabellen!



a) Zeichne den Graphen der Funktion $g(x) = x^2 + 4x + 1$ und lies ihre Nullstellen ab: (schwarz)
$x_1 \approx -3{,}75$ und $x_1 \approx -0{,}25$

b) Graph der Funktion $f(x) = -x^2 + 3{,}5x - 2{,}7$ (blau)
Scheitel ungefähr bei: S(1,75 | 0,4)

3. Verschiedene Formen

Normalform	$f(x) = ax^2 + bx + c$	Aus dieser Form heraus kann bei der Nullstellensuche die Lösungsformel angewandt werden.
Scheitelpunktform	$f(x) = a(x - d)^2 + e$	Hier kann der Scheitel der Parabel abgelesen werden S(d|e)
faktorisierte Form	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	Hier können die Nullstellen direkt abgelesen werden

Beispiel:

Normalform	$f(x) = 2x^2 - 12x + 16$	Löse f(x) = 0: $x_{1,2} = \frac{12\pm\sqrt{144-4\cdot2\cdot16}}{2\cdot2} = \frac{12\pm4}{4}$; $x_1 = 2$, $x_{1,2} = 3$
Scheitelpunktform	$f(x) = 2(x-3)^2 - 2$	Scheitel S(+3|-2) direkt ablesbar
faktorisierte Form	$f(x) = 2(x-2)(x-3)$	Die Nullstellen sind direkt ablesbar: $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$

4. Scheitelpunktform

Funktionsterm	Scheitelform	Scheitel	Schnittpunkte x-Achse	Schnittpunkt y-Achse
$f(x) = x^2 + 4x + 4$	$f(x) = (x+2)^2$ *binomische Formel*	(-2|0)	(-2|0) doppelt	(0|4)
$g(x) = x^2 + 12x + 1$	$g(x) = (x+6)^2 - 35$ z.B. quadrat. Ergänzen: $x^2 + 12x + 1 = (x^2 + 12x \mathbf{+ 36) - 36} + 1$	(-6|-35)	$(-6+\sqrt{35}\|0)$, $(-6-\sqrt{35}\|0)$	(0|1)
$h(x) = -2x^2 + 8x - 4$	$h(x) = -2(x-2)^2 + 4$	(2|4)	$(2+\sqrt{2}\|0)$, $(2-\sqrt{2}\|0)$	(0|-4)
$k(x) = (x-1)(x+5)$	$k(x) = (x+2)^2 - 9$ Der Scheitel liegt genau zwischen den Nullstellen.	(-2|-9)	(-5|0), (1|0)	(0|-5)
$l(x) = (2-x)(2+x)$	$l(x) = -x^2 + 4$	(0|4)	(-2|0), (2|0)	(0|4)

5. Eigenschaften

Gleichung der Parabel	Scheitel	Öffnung	Kongruent, enger, weiter?
$y = 2\,(x-3)^2 + 4$	(3|4)	oben	enger
$y = -3\,(x+2)^2 - 1$	(-2|-1)	unten	enger
$y = 0{,}3\,(x-1)^2$	(1|0)	oben	weiter
$y = -3\,(x+2)^2$	(-2|0)	unten	enger
$y = 3x^2$	(0|0)	oben	enger
$y = 2x^2 + 5$	(0|5)	oben	enger
$y = (x+1)(x-1)$	(0|-1)	oben	Kongruent
$y = (x+1)(x+4)$	(-2,5|-2,25)	oben	Kongruent
$y = -(x+1)(x-4)$	(+1,5|6,25)	unten	Kongruent
$y = (x-2)^2 + 3$	(2|3)	oben	Kongruent
$y = -(x+1)^2 - 1$	(-1|-1)	unten	Kongruent

6. Spiegeln

	Gesp. an x-Achse	Gesp. an y-Achse
$f(x) = x^2 + 2$	$f_1(x) = -x^2 - 2$	$f_2(x) = x^2 + 2$ *bleibt, da achsensymmetrisch zur y-Achse*
$g(x) = (x-2)^2 + 3$	$g_1(x) = -(x-2)^2 - 3$	$g_2(x) = (x+2)^2 + 3$
$h(x) = (x-2)(x+3)$	$h_1(x) = -(x-2)(x+3)$	$h_2(x) = (x+2)(x-3)$

7. Bestimme den Funktionsterm einer zur Normalparabel kongruenten Parabel,

a) $f(x) = (x+3)(x-5)$
b) $g(x) = -(x-2)(x-7)$

8. Bestimme den Funktionsterm einer Parabel,

a) Scheitelkoordinaten in Scheitelform einsetzen: $f(x) = a\,(x+2)^2 - 7{,}5$;
Setze nun die Koordinaten von P für x und y ein: $-4{,}5 = a\,(1+2)^2 - 7{,}5$
und löse nach a auf: $a = \frac{1}{3}$ somit ist $f(x) = \frac{1}{3}(x+2)^2 - 7{,}5$

b) Für x = 0,5 hat die Funktion den Funktionswert $f(0{,}5) = -\frac{65}{12} \approx -5{,}42$, der Funktionsgraph geht also durch $P(0{,}5\,|\,-\frac{65}{12})$

$y_A = -4 > -5{,}42 = y_P$

Die y-Koordinate von A ist größer als dieser Wert, A liegt also über dem Graphenpunkt.