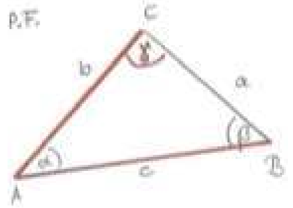
Kongruenzsätze - Lösungen **Jgst. 8-3**
(Stichworte: Kongruenzsätze, Konstruktion von Dreiecken, besondere Linien im Dreieck)

Aufgabe 1

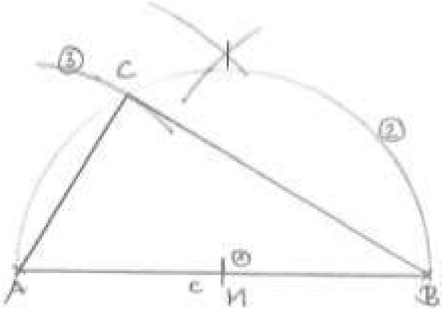
Rechtwinkliges Dreieck: Katheten (am rechten Winkel anliegend), Hypotenuse (gegenüber dem rechten Winkel)
Gleichschenkliges Dreieck: Basis, Schenkel, Basiswinkel

Aufgabe 2 - Bei allen Konstruktionsaufgaben sind Skizzen erforderlich!

a) Planfigur:

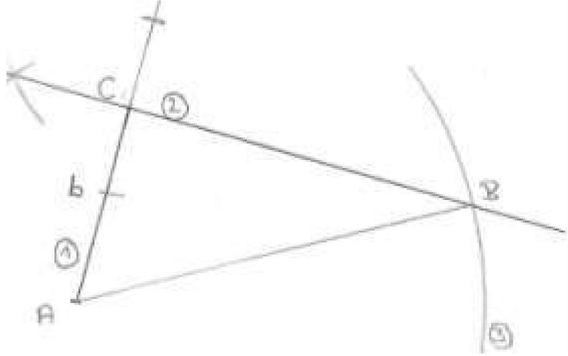


1. Möglichkeit:



Zeichne die Strecke c =[AB] mit c = 6 cm.
(1) Konstruiere ihren Mittelpunkt M.
(2) Zeichne einen Kreis um M mit Radius 0,5c.
(Das ist der Thaleskreis über [AB])
(3) Zeichne einen Kreis k(A; 3cm)
Der Schnittpunkt beider Kreise ist der Eckpunkt C.

2. Möglichkeit:

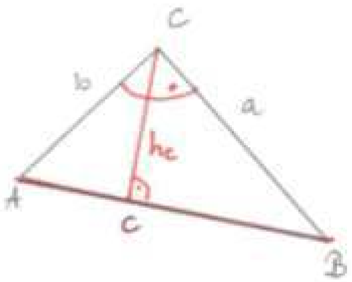


Zeichne die Strecke b = [AC].
(1) Errichte das Lot auf AC durch den Punkt C.
(2) Zeichne einen Kreis um A mit Radius c = 6cm.
(3) Der Schnittpunkt von Lot und Kreis ist B.

Anmerkung: Die Konstruktionsbeschreibung natürlich kann auch ausführlicher ausgeführt werden oder anders aufgeschrieben werden.
Wichtiges Vokabular: Lot errichten, Lot fällen, Winkelhalbierende konstruieren, Mittelsenkrechte konstruieren

b)

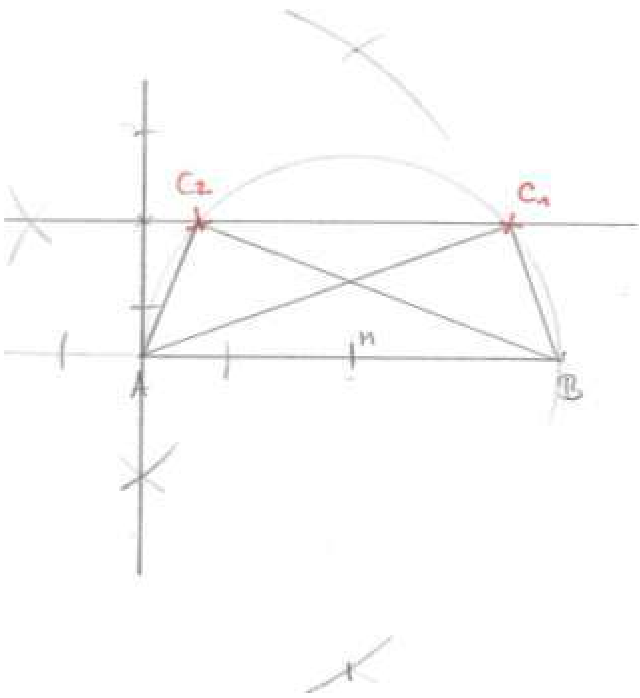
PF:



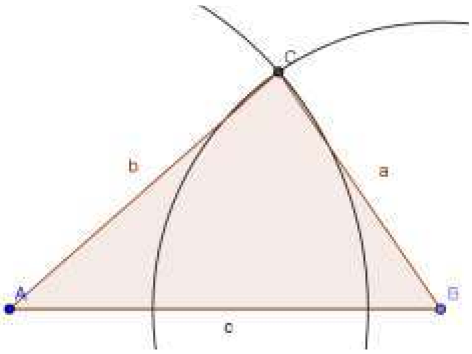
Konstruktionsbeschreibung:
Zeichne die Strecke c =[AB] mit c = 6 cm.
(1) Konstruiere ihren Mittelpunkt M.
(2) Zeichne einen Kreis um M mit Radius 0,5c.
(3) Konstruiere eine Parallele zu AB im Abstand 2 cm.
(4) Die Parallele schneidet den Kreis um M zwei Mal.
Die Schnittpunkte heißen C_1 und C_2.

Es entstehen zwei Dreiecke ABC_1 und ABC_2, die zueinander kongruent sind.

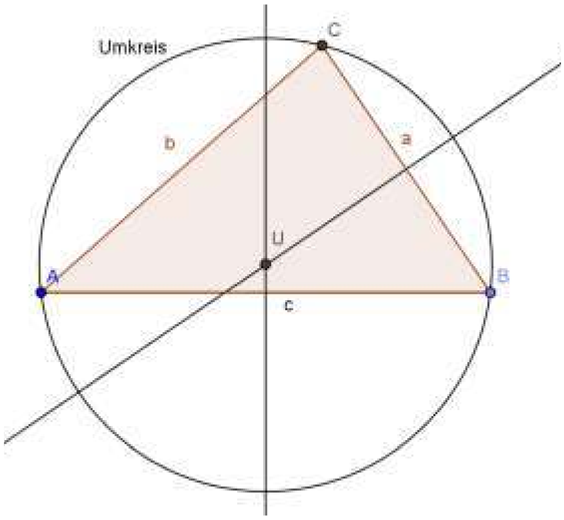
Konstruktion:



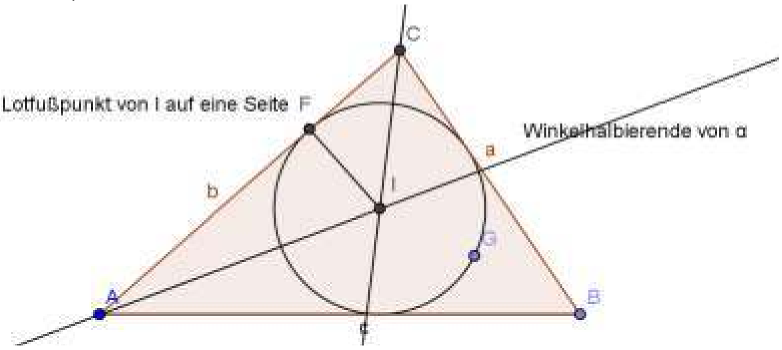
c) Beginne mit einer Seite, zum Beispiel mit [AB] = c. Der Kreis um A mit Radius 5 cm und der Kreis um B mit Radius 4 cm schneiden sich in C.



Der Umkreismittelpunkt U wird konstruiert, in dem die Mittelsenkrechten zweier Dreiecksseiten konstruiert werden. (Die dritte Mittelsenkrechte verläuft ebenso durch U). Es gilt: $\overline{UA} = \overline{UB} = \overline{UC}$



d) Der Inkreismittelpunkt I ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Für die Konstruktion genügen allerdings auch wieder zwei Winkelhalbierende (im Bild von α und γ). Den Radius des Inkreises bekommt man, indem man ein Lot von I auf eine Seite des Dreiecks fällt.



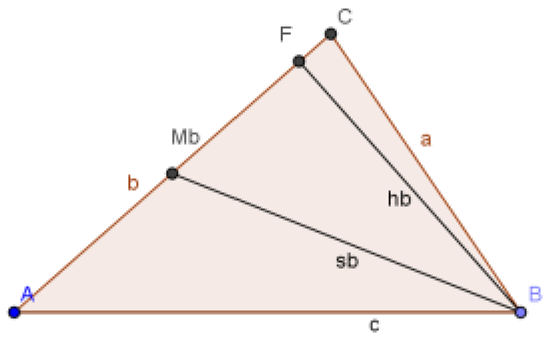
e) Das Viereck wird im Allgemeinen mithilfe zweier Dreiecke konstruiert. Für die Konstruktion des ersten Dreiecks benötigt man drei Stücke (Seiten oder Winkel), für das zweite Dreieck zwei weitere Stücke. Anhand der Kongruenzsätze erkennt man, ob die beiden Dreiecke jeweils eindeutig konstruierbar sind.
Hat das Viereck eine besondere Eigenschaft (z.B. Punktsymmetrie beim Parallelogramm), so reichen natürlich weniger Stücke aus.

Aufgabe 3

	Wahr	*Falsch*
In einem rechtwinkligen Dreieck heißt die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite Hypotenuse.	x	
Wenn zwei Dreiecke in allen Seiten übereinstimmen, dann sind sie kongruent.	x (SSS-Satz)	
Aus drei gegebenen Streckenlängen a, b und c kann man immer ein Dreieck ABC mit a, b und c als Seiten konstruieren.		x (das geht nur, wenn immer zwei Seiten zusammen länger als die dritte sind.)
Gleichschenklige Dreiecke sind schon dann kongruent, wenn sie in der Basis übereinstimmen.		x
Gleichschenklige Dreiecke sind kongruent, wenn sie in der Basis und im Winkel an der Spitze übereinstimmen.	x	
Alle Dreiecke, die in drei Winkeln übereinstimmen sind kongruent.		x (einen WWW-Satz gibt es natürlich nicht)

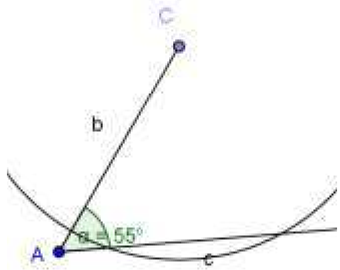
Aufgabe 4.

a) Die Seitenhalbierende s_b verläuft durch die Ecke B und den Mittelpunkt M_b der Seite b. Die Höhe h_b verläuft durch B und ist das Lot auf die Seite b (Lotfußpunkt im Bild F). Sie muss nicht durch den Mittelpunkt von b gehen!



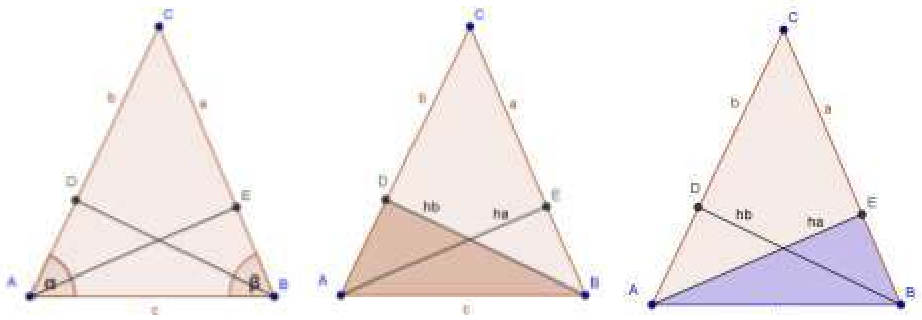
b) Nach dem Kongruenzsatz SsW ist das Dreieck eindeutig konstruierbar, bei dem der gegebene Winkel der größeren Seite gegenüber liegt. Das ist der Fall für das 1. Dreieck.

Im zweiten Dreieck ergibt sich folgende Situation:
Zeichne b = 2,9 cm
Trage den Winkel 55° an b in A an.
Der Kreis um C mit Radius a = 2,9 cm schneidet den freien Schenkel zwei Mal!



Aufgabe 5.

Beweisidee:
In einem Dreieck ABC mit der bekannten Eigenschaft (zwei Höhen gleich) werden zwei Teildreiecke betrachtet (siehe Abbildungen).
Wenn nun die beiden markierten Teildreiecke kongruent sind, dann sind die entsprechenden Seitenlängen und Winkel in diesen Teildreiecken gleich groß. Wenn also die Winkel α und β gleich groß sind, ist das Dreieck ABC gleichschenklig.



Voraussetzungen: $h_a = h_b$
D ist der Höhenfußpunkt der Höhe h_b; E ist der Höhenfußpunkt der Höhe h_a;

Behauptung: $\alpha = \beta$

Beweis: Ich zeige: Das Dreieck ABD ist kongruent zum Dreieck ABE.

(1) Beide Dreiecke haben die Seite [AB] gemeinsam

(2) Die Dreiecksseiten [BD] und [AE] sind gleich lang, wegen der Voraussetzung $h_a = h_b$.

(3) Die Winkel $\measuredangle$ADB und $\measuredangle$ AEB sind jeweils 90° groß.

Aufgrund des SsW-Satzes sind die Dreiecke ABD und ABE kongruent, also sind auch die Winkel α und β gleich groß. Ein Dreieck (jetzt das Dreieck ABC) mit zwei gleich großen Winkeln ist gleichschenklig.
Qed.