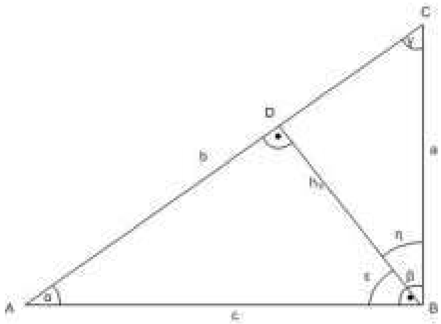
Lösungen: Trigonometrie und Fortführung der Raumgeometrie   Jgst 10-3
(Stichwörter: Trigonometrie, Oberfläche und Volumen von Zylinder, Prisma und Kegel)

1. Vervollständige die angegebene Tabelle und Verwendung der rechts abgebildeten Skizze.

Dreieck	ABC		ABD		BCD	
Winkel	α	β	α	ε	η	γ
Gegenkathete	a	b	h_b	[AD]	[DC]	h_b
Ankathete	c	a	[AD]	h_b	h_b	[DC]
Hypotenuse	b	b	c	c	a	a
Sinus	$\frac{a}{b}$	1	$\frac{h_b}{c}$	$\frac{[AD]}{c}$	$\frac{[DC]}{a}$	$\frac{h_b}{a}$
Cosinus	$\frac{c}{b}$	0	$\frac{[AD]}{c}$	$\frac{h_b}{c}$	$\frac{h_b}{a}$	$\frac{[DC]}{a}$
Tangens	$\frac{a}{c}$	nicht definiert	$\frac{h_b}{[AD]}$	$\frac{[AD]}{h_b}$	$\frac{[DC]}{h_b}$	$\frac{h_b}{[DC]}$



2. Trigonometrie im Alltag!

a) Es gilt: $\sin 8° = \frac{800m}{g}$ → g beträgt ca 5,7 km

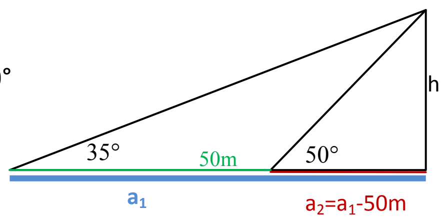
b) Es gilt: $0{,}08 = \tan\alpha$ → $\alpha \approx 4{,}6°$; mit $\sin\alpha$ = Höhenunterschied / Straßenlänge → Höhenunterschied ca 273 m

c) a_1 bzw. a_2 bezeichne jeweils den Abstand des Fußgängers vom Hochhaus; dann gilt $a_2 = a_1 - 50m$. Die Höhe des Hochhauses sei h. Dann gilt $\tan 35° = \frac{h}{a_1}$ und $\tan 50° = \frac{h}{a_1 - 50m}$;

Auflösen nach h und gleichsetzen ergibt: $a_1 \cdot (\tan 35°) = (a_1 - 50m)\ \tan 50°$

Auflösen nach a_1 ergibt: $a_1 \cdot (\tan 35° - \tan 50°) = -50m \cdot \tan 50°$
und damit: $a_1 = 121m$.

Daraus folgt $h = a_1 \cdot \tan 35° \approx 85m$.



3. Oberfläche von Zylinder, Prisma, Pyramide und Kegel

a) Die benetzte Fläche ergibt sich aus der Summe aus benetzter Grundfläche (Kreisring!), der benetzten Innen- sowie Außenfläche.

Benetzte Fläche in mm² $\pi\,(9^2 - 8^2) + 2 \cdot \pi \cdot 8 \cdot 45 + 2 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 45 = 1547\,\pi \approx 4860\ [mm^2]$

b) Die benötigte Menge Stoff ergibt sich aus der Mantelfläche des Prismas:

Fläche = $6 \cdot 30 \cdot (70 + 2 + 2)\ cm^2 = 13320\ cm^2 \approx 1{,}33\ m^2$

c) Die Höhe eines Seitenflächendreiecks berechnet man mit dem Satz des Pythagoras:
$h_s^2 = (115\ m)^2 + (146\ m)^2$ → $h_s \approx 185{,}9$ m;
daraus ergibt sich die Mantelfläche (vier Dreiecke) $M = 4\,\frac{1}{2} \cdot 230m \cdot 185{,}9m \approx 85514\ m^2$

d) Es entstehen in beiden Fällen Kegel.
Kegel 1: Höhe 3 cm und Radius der Grundfläche 4 cm ; Kegel 2: Höhe 4 cm und Radius der Grundfläche 3 cm

Es ist: Oberfläche Kegel: $r^2 \cdot \pi + r \cdot \pi \cdot m$ wobei m jeweils die Hypotenuse des rotierenden Dreiecks ist. In beiden Fällen ist m = 5

Somit folgt $A_1 = \pi(4^2 + 4 \cdot 5) = 36\,\pi$ bzw. $A_2 = \pi(3^2 + 3 \cdot 5) = 24\,\pi$. Bei Rotation um die Hypotenuse entsteht ein Doppelkegel.

e) Aus dem Öffnungswinkel 80° ergibt sich die Mantellinie $m = \frac{5\ cm}{\sin 40°} \approx 7{,}8$ cm. Für die Höhe h folgt:
$h = = \frac{5\ cm}{\tan 40°} \approx 6{,}0$ cm. Für die Oberfläche des Kegels folgt schließlich: $O = \pi(5^2 + 5 \cdot 7{,}8)\ cm^2 \approx 201\ cm^2$

4. Volumen von Zylinder, Prisma, Pyramide und Kegel

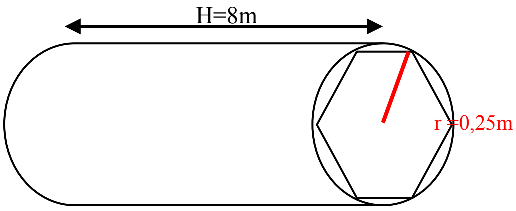
a) Die Höhe des Stamms wird mit H bezeichnet.

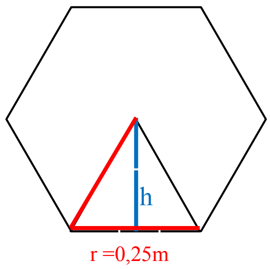
Das Volumen der Holzstamms beträgt $V_H = r^2\,\pi\, H = (0{,}25\text{m})^2\,\pi \cdot 8\text{ m} \approx 1{,}57\ \text{m}^3$.
Damit der Balken maximales Volumen hat, muss das Sechseck, das die Grundfläche bildet, die Seitenlänge 25 cm haben (Das regelmäßige Sechseck besteht aus 6 gleichseitigen Dreiecken!).
Damit ergibt sich für die Grundfläche des Balkens

$h^2 = r^2 - (0{,}5r)^2 = \frac{3}{4}r^2$ und $h = \frac{\sqrt{3}}{2}r$ ($\approx 0{,}217$ m)

$G_B = 6 \cdot \frac{1}{2}r \cdot \text{h} = 6 \cdot \frac{1}{2}r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}r = \frac{3\sqrt{3}}{2}r^2 \approx 0{,}16\, m^2$ und somit das Balkenvolumen von $V_B = G_B \cdot H = 1{,}28\ \text{m}^3$.

Damit ergibt sich der prozentualer Verlust: $\frac{1{,}58 - 1{,}28}{1{,}58} \approx 19\ \%$





b) Das Volumen der Cheopspyramide ergibt sich zu $V_P = \frac{1}{3} \cdot\cdot\, (230\text{ m})^2 \cdot 146\text{ m} \approx 2\,574\,467\ \text{m}^3$. Daraus folgt für die Masse $m = V_P \cdot \rho = 2\,574\,467\ \text{m}^3 \cdot 2{,}66 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3 = 6{,}85 \cdot 10^9\ \text{kg} = 6{,}85 \cdot 10^6\ \text{t}$ (Tonnen).