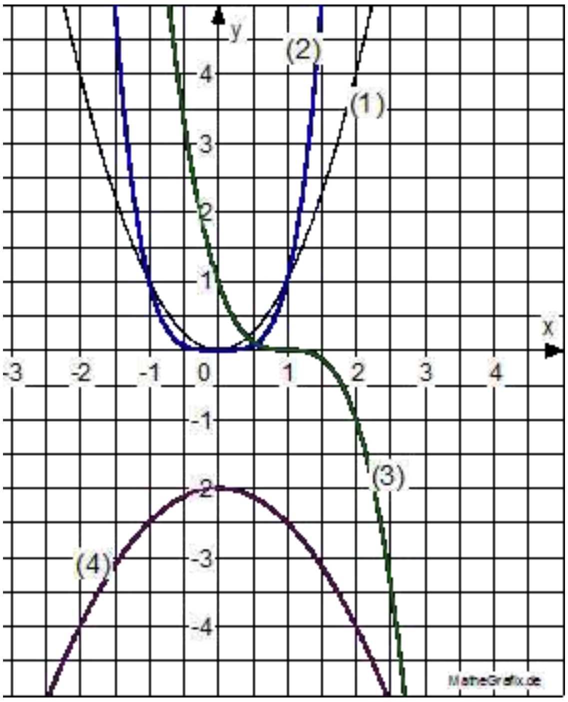
I. Potenzfunktionen



1. Ordne den Graphen eine der angegebenen Funktionsgleichungen zu. Begründe Deine Entscheidung!

a) $-0{,}5x^2-2$
→ (4) Um 2 Einheiten in negative y-Richtung verschobene, nach unten geöffnete Parabel, die mit dem Faktor 0,5 verbreitert ist.

b) $(x-2)^2\cdot\frac{1}{2}$ (Um 2 nach rechts verschobene, verbreiterte Normalparabel)

c) $-(x-1)^3$
→ (3) Um 1 nach rechts verschobener und an der x-Achse gespiegelter Graph der x^3 –Funktion.

d) x^4
→ (2) Die Funktionswerte für x e]0;1[liegen näher an der x-Achse, als bei f(x) = x^2.
f(x)=x^4 und f(x)=x^6 sind achsensymmetrisch zur y-Achse. Außerdem gilt $1{,}5^4$=5,06 und $1{,}5^6$ =11,39. Deshalb kann h) ausgeschlossen werden.

e) x^2
→ (1) Normalparabel mit Scheitel im Ursprung

f) $-(x+1)^3$ (Um 1 nach links verschobener und an der x-Achse gespiegelter Graph der x^3-Funktion.)

g) $(x-1)^3$ (Um 1 nach rechts verschobener Graph der x^3-Funktion)

h) x^6 (vgl. d))

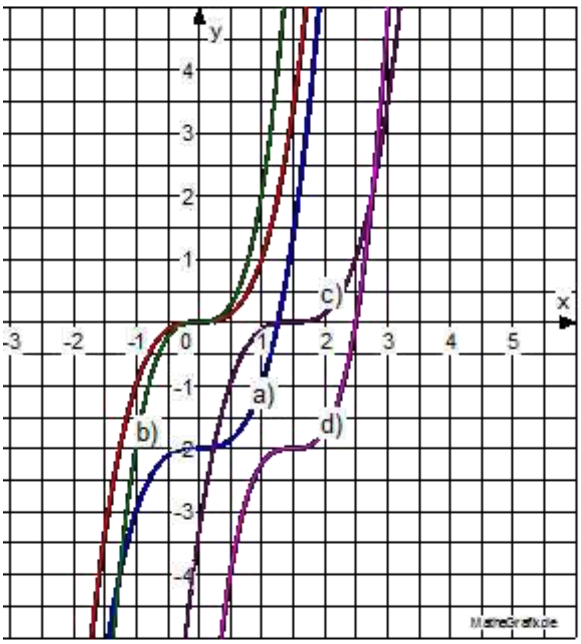
i) $-2+\frac{1}{2}\cdot x^2$ (Um 2 nach unten verschobene, nach OBEN offene und verbreiterte Normalparabel)

j) x^5 (vgl. c))

2. Gegeben ist die Potenzfunktion $f(x)=ax^n$ mit $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $n\in\mathbb{N}$. Welche Aussage kann man über a und n treffen, wenn der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung ist und durch den Punkt P(1/-1) verläuft?
Lösung: a = -1, da (1/-1) ∈ G_f d.h.: $a\cdot 1^n=-1$; aus der Punktsymmetrie folgt, dass n ungerade sein muss.

3. Zeichne den Graphen der Funktion $f(x)=x^3$ in ein Koordinatensystem. Skizziere (ohne Berechnung) mit verschiedenen Farben die folgenden Funktionsgraphen:

a) $x\mapsto x^3-2$ b) $x\mapsto 2x^3$
c) $x\mapsto (x-1{,}5)^3$ d) $x\mapsto 2(x-1{,}5)^3-2$



II. ganzrationale und gebrochenrationale Funktionen

1. Zerlege die Funktionsterme vollständig in Linearfaktoren (soweit möglich). Gib den Grad der Nullstellen an.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3(x-4)$; Dieser Term ist bereits vollständig zerlegt. Nullstellengrad: x_1=0 (Grad 3); x_2= 4 (Grad 1)

b) $f(x) = x^4 - 15x^2 - 16$; Substitution: u:= $x^2 \Rightarrow f(x) = u^2 - 15u - 16 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 16$; $u_2 = -1$; Resubstitution:

$x_{1/2} = \mp 4$; x_1=4 (Grad 1); x_2= -4 (Grad 1)

Zerlegung mit Polynomdivision (ausführlich für Teilaufgabe c) dargestellt):

$$(x^4 - 15x^2 - 16) : (x^2 - 16) = x^2 + 1$$

$$f(x) = x^4 - 15x^2 - 16 = (x-4)(x+4)(x^2+1)$$

c) $f(x) = x^3 - 6{,}5x^2 + 11x - 4$; x_1= 2 (gefunden durch ausprobieren); Polynomdivision (siehe unten) und Mitternachtsformel liefert: x_2= 4; x_3=0,5. Alle Nullstellen haben den Grad 1.

$$(x^3 - 6{,}5x^2 + 11x - 4) : (x-2) = x^2 - 4{,}5x + 2$$

$$\underline{-(x^3 - 2x^2)}$$

$$-4{,}5x^2 + 11x - 4$$

$$\underline{-(-4{,}5x^2 + 9x)}$$

$$2x - 4$$

$$-(2x-4)$$

Zerlegung: $f(x) = x^3 - 6{,}5x^2 + 11x - 4$ = (x-2)(x-4)(x-0,5)

d) $f(x) = 2x(x^2 + x - 12)(x-3)$ Folgende Nullstellen sind sofort sichtbar: x_1=0 ; x_2=3

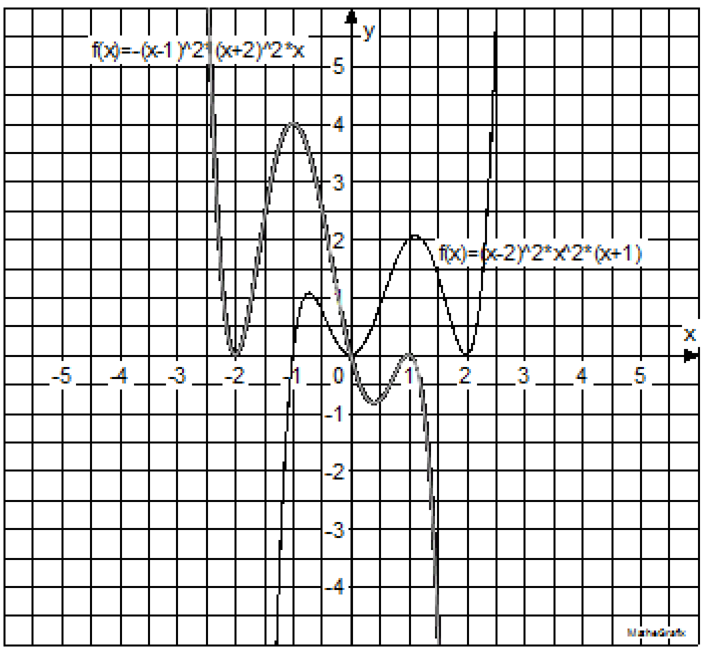
Noch zu prüfen: $x^2 + x - 12 = 0$; Lösung: x_3=-4; x_4= 3

Die Nullstellen x_1 und x_3 sind vom Grad 1, die Nullstelle $x_{2/4}$ ist vom Grad 2.

Zerlegung: $f(x) = 2x(x+4)(x-3)^2$

2.

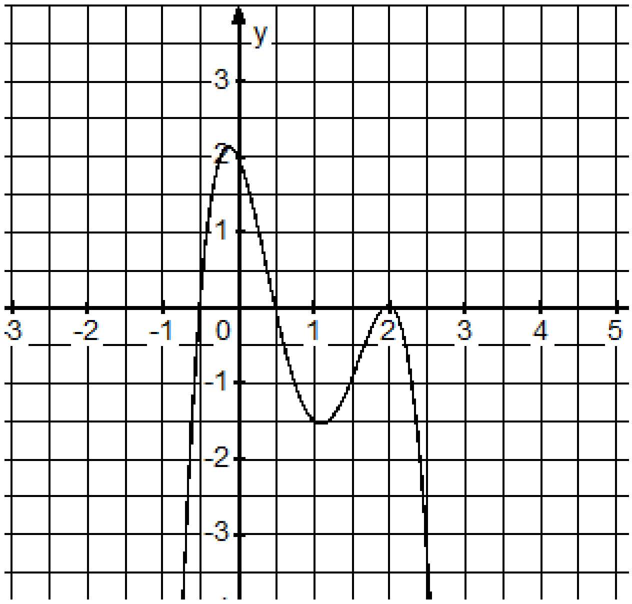
a) Eine ganzrationale Funktion fünften Grades besitzt zwei doppelte und eine einfache Nullstelle. Skizziere zwei verschiedene mögliche Graphen (Zwei verschiedene Farben verwenden!)



b) Skizziere den Graphen der Funktion

$f(x) = -2(x^2 - \frac{1}{4})(x-2)^2$. Markiere dabei im Koordinatensystem die Nullstellen.

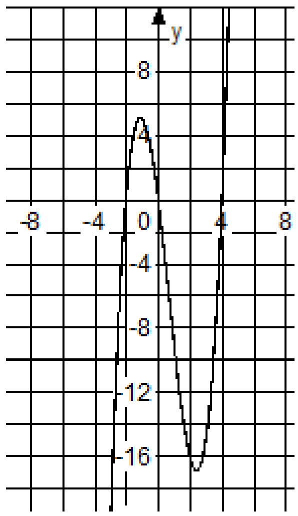
Die Nullstellen befinden sich bei x_1=0,5 (einfache NS), bei x_2=-0,5 (einfache NS) und bei x_3=2 (doppelte Nullstelle).



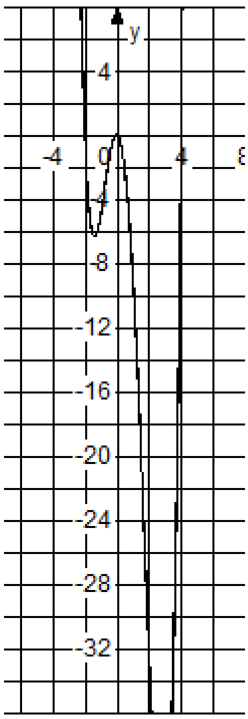
c) Gib eine Funktion 3., 4. bzw 5. Grades an, die jeweils folgende drei Nullstellen hat: x_1 = -2 , x_2 = 0 und x_3 = 4. Skizziere jeweils die Graphen der Funktion.

BEISPIELE (es gibt natürlich auch andere Möglichkeiten):

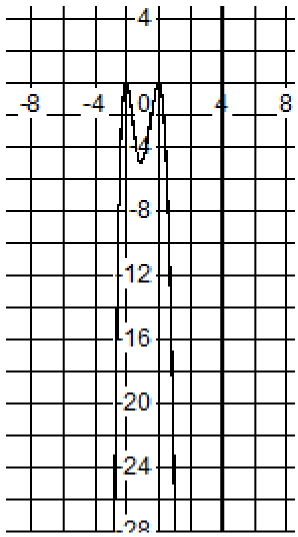
Grad 3



Grad 4 (x=0 doppelte NS)

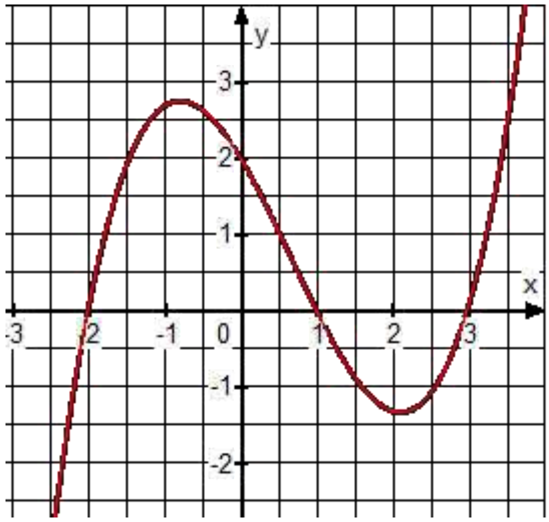


Grad 5 (x=0 und x=-2 doppelte NS)

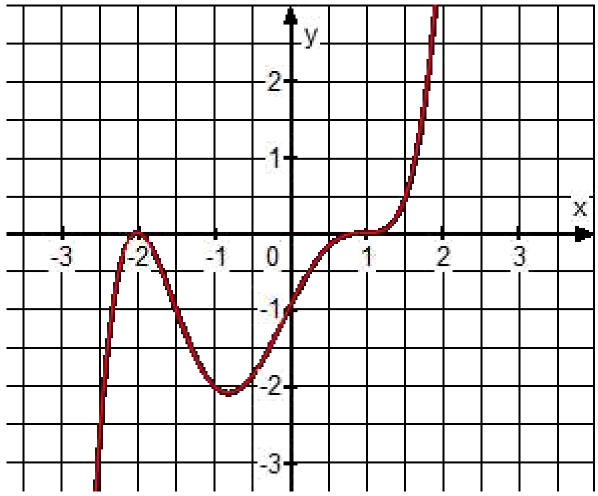


3. Bestimme die Funktionsterme ganzrationaler Funktionen zu den gegebenen Graphen. Die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen mit den Achsen sind ganzzahlig. Der Grad und ein Punkt P der Graphen sind angegeben.

a) Grad 3; P(0/2)



b) Grad 5; P(-1/-2)



3a) $f(x) = a(x+2)(x-1)(x-3)$; $f(0) = 2$ *liefert* $a = \frac{1}{3}$

3b) $f(x) = a(x+2)^2(x-1)^3$; $f(-1) = -2$ *liefert* $a = \frac{1}{4}$

4. Welche der angegebenen Funktionsgleichungen passen zum Graphen? Begründe.
Tipp: Am besten formt man f_1 und f_2 noch um, da die Terme sonst nur schlecht analysiert und verglichen werden können.

$$f_1(x) = \frac{2x-5}{x-2} = \frac{2(x-2{,}5)}{x-2} = \frac{2(x-2-0{,}5)}{x-2} =$$
$$= \frac{2(x-2)-1}{x-2} = \frac{2(x-2)}{x-2} - \frac{1}{x-2} = 2 - \frac{1}{x-2}$$

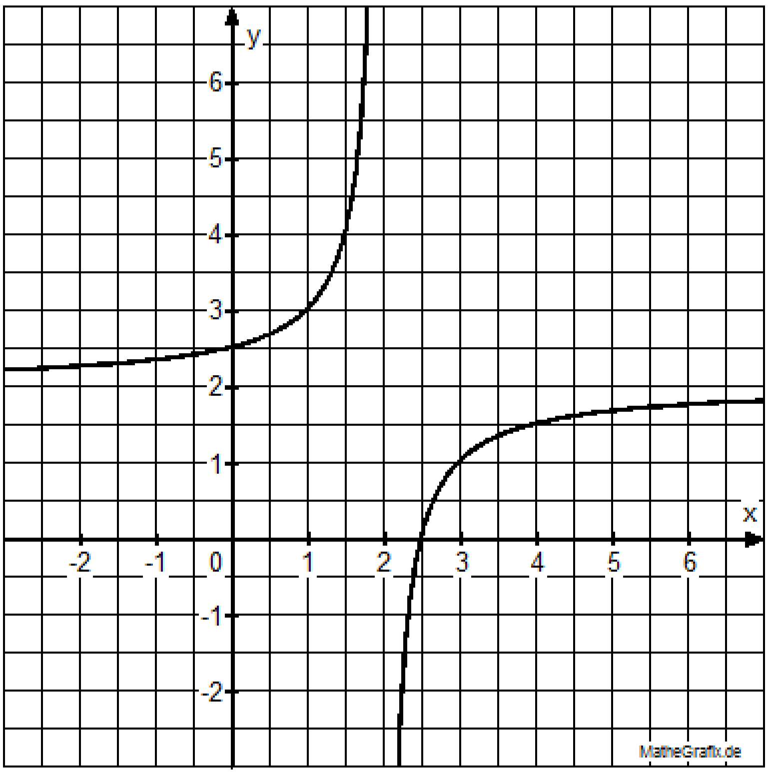
$$f_2(x) = \frac{2x+5}{x-2} = 2 + \frac{9}{x-2}$$

$$f_3(x) = 2 - \frac{1}{x-2}$$

$$f_4(x) = 2 - \frac{2}{x-2}$$

$$f_5(x) = 2 + \frac{1}{x-2}$$

$$f_6(x) = 2 + \frac{2}{x-2}$$



Die Graphen aller angegebenen Funktionsterme sind um 2 nach oben (in positive y-Richtung) verschobene Hyperbeln. Der abgebildete Graph entsteht aus Hyperbeln, die noch zusätzlich um 2 nach rechts verschoben wurden. Dies trifft ebenfalls für die Graphen aller angegebenen Terme zu. Dies erkennt man am Term (x-2) im Nenner. Außerdem sind die Hyperbeln gegenüber den Graphen des Funktionsterms f(x) = 1/x an der x-Achse gespiegelt. Deswegen kommen nur die Funktionsterme f_4 und f_1=f_3 in Frage. f_4 scheidet aus, wie man z.B. durch das Berechnen von einzelnen Funktionswerten erkennen kann.