Rechnen mit Bruchtermen, gebrochen-rationale Funktionen -LÖSUNGEN Jgst 9-3

(Stichwörter: Hyperbel, Bruchterme, Bruchgleichung)

1. Erweitere auf den angegebenen Nenner

a) $9x-3x^2=3x(3-x)$ somit: $\frac{3}{3-x}=\frac{3\cdot\mathbf{3x}}{3x(3-x)}=\frac{9x}{9x-3x^2}$

b) $2x-6x^2=2x(1-3x)$ daher: $\frac{4x}{3x-1}=\frac{4x\cdot(-\mathbf{2x})}{-2x(3x-1)}=-\frac{8x^2}{2x-6x^2}$

2. Kürze soweit wie möglich!

a) $\frac{24ab-6b}{12b^2}=\frac{6b(4a-1)}{2\cdot6b^2}=\frac{4a-1}{2b}$ hier geht nichts mehr! Nicht 4 und 2 kürzen!

b) $\frac{10cd^3-5c^2d^2}{25c^2d^2-50cd^3}=\frac{5cd^2(2d-c)}{25cd^2(c-2d)}=\frac{5cd^2(2d-c)}{25cd^2\cdot(-\mathbf{1})(2d-c)}=-\frac{1}{5}$ TIPP: c – 2d = (-1)(2d – c)

c) $\frac{6xy-24y}{12x^2-16x}=\frac{6y(x-4)}{4x(3x-4)}=\frac{3y(x-4)}{2x(3x-4)}$ hier geht nicht mehr!!

3. Fasse zusammen und vereinfache!

a) $\frac{3-x}{x+2}+\frac{5+x}{x}=\frac{\mathbf{x}(3-x)}{\mathbf{x}(x+2)}+\frac{(5+x)(x+\mathbf{2})}{x(x+\mathbf{2})}=\frac{(3x-x^2)+(x^2+7x+10)}{\mathbf{x}(x+2)}=\frac{10x+10}{\mathbf{x}(x+2)}$

b) $\frac{3x}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{3x(x+2)-1\cdot(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{3x^2+6x-x+2}{(x-2)(x+2)}=\frac{3x^2+5x+2}{(x-2)(x+2)}$ Achtung auf die Minusklammer!

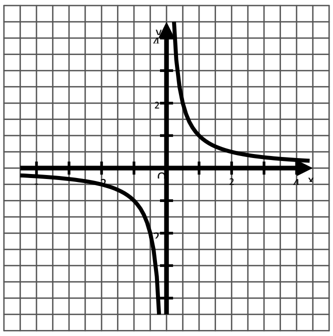
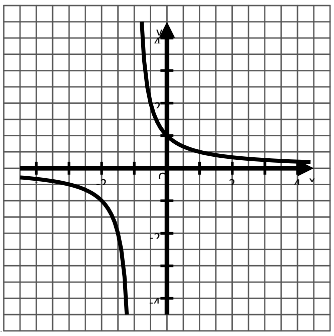
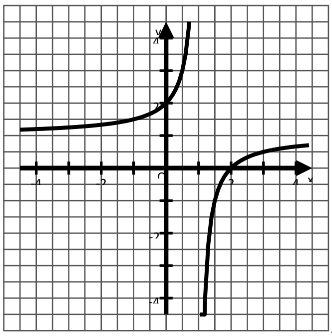
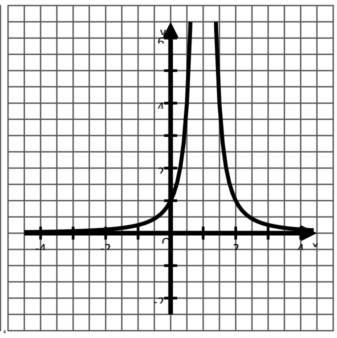
c) $\frac{3+2x}{4x}+2=\frac{3+2x}{4x}+\frac{2\cdot4x}{4x}=\frac{3+2x+8x}{4x}=\frac{3+10x}{4x}$

d) $\frac{y+1}{7y}\cdot\frac{14y^2}{2xy+2x}=\frac{y+1}{7y}\cdot\frac{2\cdot7\cdot y\cdot y}{2x(y+1)}=\frac{(y+1)\cdot2\cdot7\cdot y\cdot y}{7y\cdot2\cdot x(y+1)}=\frac{y}{x}$

e) $\frac{6a}{a^2+2a}:\frac{3ab+6a^2}{ab+2b}=\frac{6a}{a^2+2a}\cdot\frac{ab+2b}{3ab+6a^2}=\frac{6a\cdot b\cdot(a+2)}{a\cdot(a+2)\cdot3\cdot a\cdot(b+2a)}=\frac{2b}{b+2a}$

4. Skizziere die Graphen folgender Funktionen. Überprüfe mit Hilfe eines Funktionsplotters.

a) f(x) = $\frac{1}{x}$ b) g(x) = $\frac{1}{x+1}$ c) h(x) = $-\frac{1}{x-1}+1$ d) i(x) = $\frac{1}{(x-1)^2}$

(2 Kästchen entsprechen einer Längeneinheit)

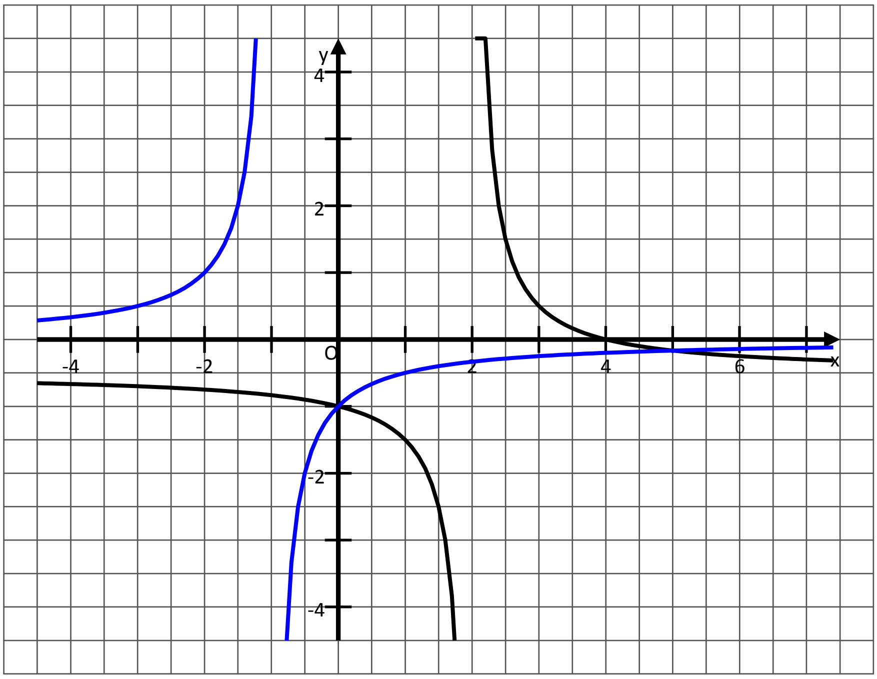
Zu a)
Der Graph heißt **Hyperbel**. Der **Definitionsbereich** ist D = $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, der **Wertebereich** ist W = $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Der Graph hat eine **waagrechte Asymptote** (x-Achse) und eine **senkrechte Asymptote** (y-Achse).
Die Stelle x = 0 ist nicht definiert, hier hat die Funktion eine **Polstelle**.

Zu b)
Der Graph ist eine um 1 nach links verschobene Hyperbel. Der Definitionsbereich ist D = $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, der Wertebereich ist W = $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Der Graph hat eine waagrechte Asymptote (x-Achse) und eine senkrechte Asymptote (die Senkrechte x = -1).
Die Stelle x = -1 ist nicht definiert, hier hat die Funktion eine Polstelle.

Zu c)
Der Graph ist eine Hyperbel die an der y-Achse gespiegelt wurde und um 1 nach rechts und um 1 nach oben verschoben wurde. Der Definitionsbereich ist D = $\mathbb{R}\setminus\{+1\}$, der Wertebereich ist W = $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
Der Graph hat eine waagrechte Asymptote (Waagrechte y = 1) und eine senkrechte Asymptote (die Senkrechte x = +1).
Die Stelle x = +1 ist nicht definiert, hier hat die Funktion eine Polstelle.

5. Verschiedenes

a) Bestimme graphisch und rechnerisch die Schnittpunkte: f(x) = $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{2}$ und g(x) = $\frac{-1}{x+1}$ (g blau, f schwarz)



Rechnerische Lösung:

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x-2}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{-1}}{\boldsymbol{x+1}}$$ Ansatz: f(x) = g(x)
Definitionsmenge: $\mathbb{R}\setminus\{-1; 2\}$

$$\frac{2}{2(x-2)} - \frac{\mathbf{1(x-2)}}{\mathbf{2(x-2)}} = \frac{-1}{x+1}$$ Linke Seite auf einen Bruchstrich bringen

$$\frac{2-(x-2)}{2(x-2)} = \frac{-1}{x+1}$$ Und vereinfachen

$$\frac{4-x}{2(x-2)} = \frac{-1}{x+1}$$

$$\mathbf{(4-x)(x+1) = -2(x-2)}$$ „Über Kreuz multiplizieren"

$$-x^2 + 3x + 4 = -2x + 4$$ Äquivalenzumformungen zum Lösen der Gleichung

$$-x^2 + 5x = 0$$

$$x(-x+5) = 0$$ Lösen der Gleichung: x = 0 oder x = 5

Beide Lösungen sind in der Definitionsmenge enthalten!
Probe: f(0) = -1 und g(0) = -1 und f(5) = $-\frac{1}{6}$ und g(5) = $-\frac{1}{6}$
Die Schnittpunkte heißen daher (0/-1) und (5/$-\frac{1}{6}$).

b) Ansatz: f(x) = 2, also $\frac{-9}{3-5x}$ = 2 mit Lösung: x = 1,5; Analog: g(x) = 2; mit Lösung x = -$\frac{5}{3}$

c) $\frac{9+x}{17+x} = \frac{17}{9}$ Diese **Bruchgleichung** hat die Lösung x = -26. Probe nicht vergessen!