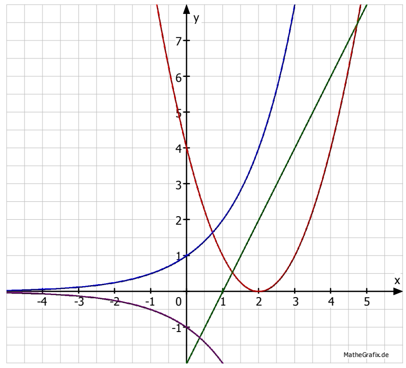
Lösungen zu Exponentialfunktionen und Rechnen mit dem Logarithmus **Jgst 11-2**

(Stichwörter: Exponentialfunktion, Exponentialgleichung, Definition des Logarithmus, Rechenregeln**)**

Aufgabe 1: Graphen der Exponentialfunktionen

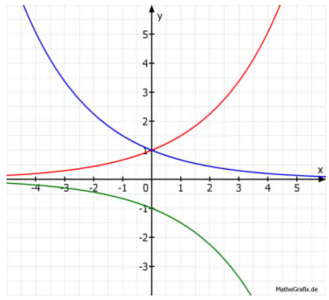


a) Der Graph von f ist eine Gerade mit der Steigung 2 und dem y-Achsenabschnitt -2. (grün)

Der Graph von g ist eine Normalparabel, die um 2 nach rechts verschoben wurde. Der Scheitel liegt daher bei (2/0), sie ist nach oben geöffnet. (rot)

h ist eine Exponentialfunktion mit der Basis 2: ihr Graph erläuft stets oberhalb der x-Achse und schneidet die y-Achse bei (0/1); er ist immer steigend. Für x→-∞ nähert sich der Graph G_h der x-Achse an und für x→+∞ werden die Funktionswerte unendlich groß. (blau)

Der Graph von k entsteht durch Spiegelung von G_h an der x-Achse. (violett)



b) G_f G_g G_h G_k Die Graphen von k und g sind identisch (siehe rechts)

c) a: Der Graph von f wird um 1 nach links verschoben.

b: Der Graph von f wird um 2 gestreckt (jeder Funktionswert wird verdoppelt. Das entspricht bei der Exponentialfunktion der Verschiebung nach links. $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$

c: Der Graph von f wird um 2 nach unten verschoben.

d: Der Graph von f wird an der y-Achse gespiegelt.

e: Der Graph von f wird um 3 nach rechts verschoben.

d) (I) A(1/2), B(3/128)

$y = c \cdot a^x$

A einsetzen:

$2 = c \cdot a^1$ somit ist c = $\frac{2}{a}$

B einsetzen:

128 = $\frac{2}{a} \cdot a^3$ I :2

64 = a^2 I $\sqrt[2]{}$

$a = 8$ und somit $f(x) = \frac{1}{4} \cdot 8^x$

(II) A(2/-25,2), B(5/-680,4)

$y = c \cdot a^x$

A einsetzen und nach c auflösen: $-25{,}2 = c \cdot a^2$ $c = -\frac{25{,}2}{a^2}$

B einsetzen und nach c auflösen: $-680{,}4 = c \cdot a^5$ $c = -\frac{680{,}4}{a^5}$

Gleichsetzen: $-\frac{25{,}2}{a^2} = -\frac{680{,}4}{a^5}$ I $\cdot a^5$:(-25,2)

$a^3 = 27$ I $\sqrt[3]{}$

Daraus folgt: $a = 3$; $c = -\frac{25{,}2}{3^2}$ = -2,8 und somit $f(x) = -2{,}8 \cdot 3^x$

Aufgabe 2: **Logarithmus und Exponentialgleichungen**

a) Mögliche Erklärungen:

- Der Logarithmus $\log_a b$ gibt die Zahl an, mit der a potenziert werden muss, um b zu erhalten.
- Der Logarithmus löst die Frage nach dem Exponenten: $a^x = b$ ⇔ x = $\log_a b$
  Nach der Basis a würde man mit Potenzieren/Wurzelziehen antworten: $a^x = b$ ⇔ a = $\sqrt[x]{b}$
- Hierbei gilt stets: a, b $\in \mathbb{R}^+$ und a$\neq$ 1.

b) Bestimme x (ohne TR):

(I) $0{,}001^x = 0{,}1$ ⇔ x = $\log_{0{,}001} 0{,}1 = \log_{0{,}001}\left(0{,}001^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3} \cdot \log_{0{,}001}(0{,}001) = \frac{1}{3}$

(II) $1{,}4^x = 1{,}96$ ⇔ x = $\log_{1{,}4} 1{,}96 = \log_{1{,}4}(1{,}4^2) = 2$

(III) $5^x = \frac{1}{625}$ ⇔ x = $\log_5 \frac{1}{625} = \log_5 625^{-1} = \log_5(5^4)^{-1} = \log_5(5^{-4}) = -4 \cdot \log_5(5) = -4 \cdot 1 = -4$

(IV) $x^5 = 23$ ⇔ x = $\sqrt[5]{23}$

c) Bestimme die Zahl a ohne Verwendung des TR, die folgende Gleichung erfüllt:

(I) $\log_a(16) = 2$ ⇔ $a^2 = 16$ und damit a = 4 (a ist immer positiv, darum ist -4 keine Lösung)

(II) $\log_a(0{,}5) = 4$ ⇔ $a^4 = 0{,}5$ ⇔ a = $\sqrt[4]{0{,}5}$ (≈ 0,84…)

(III) $\log_a(-9) = 2$ es gibt keine solche Basis a. (⇔ $a^2 = -9$!!!)

(IV) $\log_a(16) = 0$ es gibt keine solche Basis a, nur $\log_a(1) = 0$!

d) Vereinfache durch Anwendung der Rechengesetze ohne Verwendung des TR:

(I) $\log_3(9^{-11}) + \log_{11}(\sqrt{11}) - \log_{5{,}8}(1) + \log_{216}\left(\frac{1}{36}\right) = \log_3(3^{-22}) + \log_{11}\left(11^{\frac{1}{2}}\right) - 0 + \log_{6^3}(6^{-2}) =$

$= -22 + \frac{1}{2} - 0 + \log_{6^3}(6^3)^{-\frac{2}{3}} = -22 + \frac{1}{2} - 0 - \frac{2}{3} = -22\frac{1}{6}$

(II) $\log_{0,25}(7) - \log_{0,25}(16) + \log_3\left(\frac{1}{27}\right) - \log_{\frac{1}{4}}(7) = \log_{0,25}\left(\frac{7}{16\cdot 7}\right) + \log_3(3^{-3}) = \log_{0,25}\left(\frac{1}{16}\right) - 3 = \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 3 =$
$= 2 - 3 = -1$

e) Bestimme die Lösungen der Gleichung. (nicht so einfach, zugegeben…)

(I) $5^{2x-1} = 125$	(II) $2^{2x} = 7^{x-1}$ beidseitiges Logarithmieren	(III) $3^{2x} - 4\cdot 3^x + 3 = 0$ Substitution!
$2x - 1 = \log_5(125)$ $2x - 1 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2;\; L = \{2\}$ Hier geht's auch ohne log direkt: $5^{2x-1} = 125$ $5^{2x-1} = 5^3 \;\Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \;\Leftrightarrow\; x = 2$	$\lg(2^{2x}) = \lg(7^{x-1})$ $2x\cdot\lg2 = (x-1)\cdot\lg7$ $2x\cdot\lg2 = x\cdot\lg7 - \lg7$ $2x\cdot\lg2 - x\cdot\lg7 = -\lg7$ $x\,(2\lg2 - \lg7) = -\lg7$ $x = \frac{-lg7}{2lg2-\lg 7}$ **Oder**: $4^x = 7^x\cdot\frac{1}{7}$ $7 = \left(\frac{7}{4}\right)^x$ $x = \log_{\frac{7}{4}}(7)$	$3^{2x} - 4\cdot 3^x + 3 = 0$ ersetze: $a = 3^x$ $a^2 - 4a + 3 = 0$ hat die Lösungen $a_1 = 1$ und $a_2 = 3$ Rückübersetzung: $1 = 3^x$ oder $3 = 3^x$ $x = 0$ oder $x = 1$ $\quad L = \{1; 3\}$

Aufgabe 3: **Wachstum**

a) $f(x) = 4\cdot 2{,}5^x$
exponentielles Wachstum

x	0	1	2	3	4	10	20
g(x)	28	23,5	19	14,5	10	- 17	- 62

b) $g(x) = 28 - 4{,}5x$
lineares (negatives) Wachstum

x	0	1	2	3	4	10	20
f(x)	4	10	25	62,5	156,25	≈ 38147	$\approx 3{,}638\cdot 10^8$

c) $h(x) = 120\cdot 0{,}8^x$
exponentielles (negatives) Wachstum

x	0	1	2	3	4	10	20
h(x)	120	96	76,8	61,44	49,152	12,8849…	1,3835…

Aufgabe 4: Radioaktiver Zerfall

a) $M(t) = M_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8,0d}} = M_0 \cdot 2^{-\frac{t}{8,0d}}$ mit $M_0 = 400$g und t Anzahl der Tage (Einheit Tag Abkürzung d)

b) $M(1d) = M_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1d}{8,0d}} \approx 0{,}92\,M_0$ also 92% der Ausgangsmasse

$M(30d) = M_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{30d}{8,0d}} \approx 0{,}74\,M_0$ also 7,4% der Ausgangsmasse davon ausgehend: 1 Monat hat 30 Tage

c) $M(t) = 1$ mg $= 0{,}001$g; $0{,}001$ g $= 400\text{g}\cdot 2^{-\frac{t}{8,0d}} \;\Leftrightarrow\; 2{,}5\cdot 10^{-6} = 2^{-\frac{t}{8,0d}} \;\Leftrightarrow\; \log_2(2{,}5\cdot 10^{-6}) = -\frac{t}{8,0d}$

$t = -8{,}0\text{d}\cdot\log_2(2{,}5\cdot 10^{-6}) \approx 148{,}877\ldots\text{d} \approx 149\; d$

Aufgabe 5: **Zinsen**

a) t bezeichnet die Zeit in Jahren (a)

$K(t) = K_0\cdot 1{,}025^{\frac{t}{1a}}$ also $K(1a) = 500€\cdot 1{,}025^1 = 512{,}50€$; $K(2a) = 500€\cdot 1{,}025^2 = 525{,}31€$;
$K(5a) = 500€\cdot 1{,}025^5 = 565{,}70€$; $K(10a) = 500€\cdot 1{,}025^{10} = 640{,}04€$;

b) Verdopplung: $K(t) = 2\,K_0$; $2\,K_0 = K_0\cdot 1{,}025^{\frac{t}{1a}} \;\Leftrightarrow\; 2 = 1{,}025^{\frac{t}{1a}} \;\Leftrightarrow\; \frac{t}{1a} = \log_{1,025} 2 \;\Leftrightarrow\; t \approx 28{,}1$ a

Verzehnfachung: $K(t) = 10\,K_0$; $10\,K_0 = K_0\cdot 1{,}025^{\frac{t}{1a}} \;\Leftrightarrow\; 10 = 1{,}025^{\frac{t}{1a}} \;\Leftrightarrow\; \frac{t}{1a} = \log_{1,025} 10 \;\Leftrightarrow\; t \approx 93{,}2$ a

c) t weiterhin in Jahren: $K(t) = 500€\cdot 1{,}0125^{\frac{2t}{1a}}$
$K(1a) = 500€\cdot 1{,}0125^2 = 512{,}58€$; $K(2a) = 500€\cdot 1{,}0125^4 = 525{,}47€$;
$K(5a) = 500€\cdot 1{,}0125^{10} = 566{,}16€$; $K(10a) = 500€\cdot 1{,}0125^{20} = 641{,}02€$; (Ergebnisse wurden aufgerundet)