



Funktionale Zusammenhänge (Jgst. 8)

Teil 1:

Eine **Funktion f** ist eine **eindeutige Zuordnung**, die **jedem x-Wert** aus der Definitionsmenge D_f **genau einen y-Wert** aus der Wertemenge W_f zuordnet.

$$f: x \mapsto y = f(x)$$

Beispiel 1:

Einigen Lehrkräften des PG wird ihr Lieblingsfußballklub zugeordnet: Die Lehrkräfte sind die **x-Werte** (die „unabhängige Variable“) aus D_f und die Fußballklubs sind die **y-Werte** (die „abhängige Variable“) aus W_f . Von der Lehrkraft (x-Wert) hängt es also ab, welcher Fußballklub (y-Wert) genannt wird.

Die Zuordnung „Lehrkraft $\mapsto$ Fußballklub“ ist eine Funktion, da jeder Lehrkraft genau ein Lieblingsfußballklub zugeordnet wird. Keine Lehrkraft hat zwei oder mehr Lieblingsfußballklubs.

$f: \text{Lehrkraft} \mapsto \text{Fußballklub}$	
Herr Röble	$\mapsto$ FC Augsburg
Herr Klopfer	$\mapsto$ 1860 München
Herr Dietmayer	$\mapsto$ FC Augsburg
Frau Kornbichler	$\mapsto$ FC Bayern
Herr Körner	$\mapsto$ FC Saarbrücken

Umgekehrt:

Einer Auswahl von Fußballklubs wird der PG-Lehrer zugeordnet, der ihn als Lieblingsklub angibt:

Die umgekehrte Zuordnung „Fußballklub $\mapsto$ Lehrkraft“ ist keine Funktion, da z. B. dem Fußballklub FC Augsburg mehr als eine Lehrkraft (nämlich zwei, Herr Röble und Herr Dietmayer) zugeordnet wird.

$f: \text{Fußballklub} \mapsto \text{Lehrkraft}$	
FC Augsburg	$\mapsto$ Herr Röble
1860 München	$\mapsto$ Herr Klopfer
FC Augsburg	$\mapsto$ Herr Dietmayer
FC Bayern	$\mapsto$ Frau Kornbichler
FC Saarbrücken	$\mapsto$ Herr Körner

Aufgabe 2¹:

Das Diagramm zeigt die durchschnittlichen Temperaturen sowie den Bereich mit Minimal- und Maximaltemperaturen im Jahresverlauf für Macau an. Ergänze bzw. beantworte:

Dem Monat

- November wird die Temperatur ____ zugeordnet.

- Februar wird die Temperatur ____ zugeordnet.

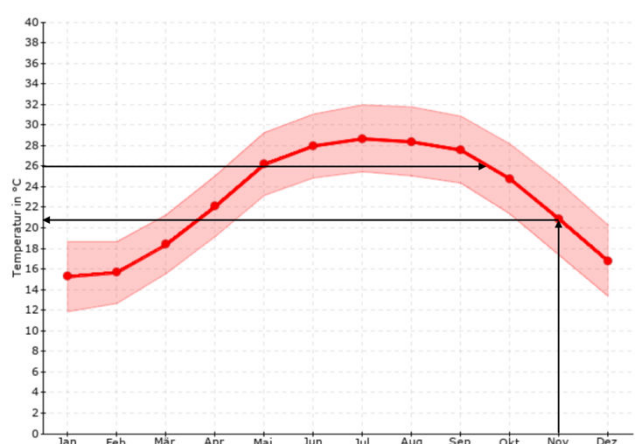
Zeichne die zugehörigen zwei Pfeile (wie bei Nov.) ein.

Die Zuordnung **Monat** $\mapsto$ _____ ist _____ Funktion, weil _____

Umgekehrt: Der Temperatur von ungefähr 26° kann man zwei oder drei Monate zuordnen (Ergänze die fehlenden Pfeile) nämlich _____

Die Zuordnung **Temperatur** $\mapsto$ _____ ist also _____ Funktion.

Temperaturdiagramm Macau



Aufgabe 3²:

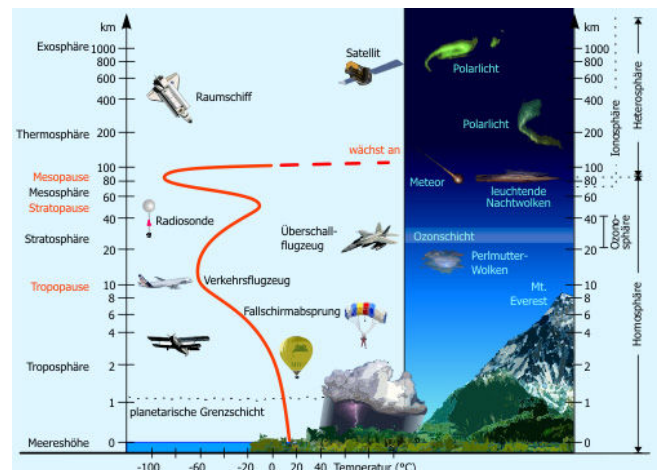
In der Abbildung ist der Aufbau der Atmosphäre von der Erdoberfläche bis zum Übergang ins Weltall dargestellt. Die rote Linie zeigt an, welche Temperatur in den unterschiedlichen Schichten herrscht.

Begründe, welche der beiden Zuordnungen

Temperatur (in °C) $\mapsto$ Höhe (in km) bzw.

Höhe (in km) $\mapsto$ Temperatur (in °C)

eine bzw. keine Funktion ist. Zeichne für die Begründung auch Pfeile in das Diagramm (z.B. bei -40°C).



¹Temperaturdiagramm Macau: <https://www.urlaubsziele.com/bilder/klima/staedte/818/?page=2>

²Temperaturdiagramm der Atmosphäre:

<https://www.simplyscience.ch/kids/wissen/lebenswichtige-luftthuelle-die-atmosphaere>

Eine Funktion f (sie kann auch a , b , g , h , usw. heißen) kann durch eine **Funktionsvorschrift** (1), einen **Funktionsterm**

(2) eine **Funktionsgleichung** (3) oder einen **Graphen (Schaubild)** (4) dargestellt werden.

(1) Funktionsvorschrift

$$f: x \mapsto y \quad \text{z. B.} \quad f: x \mapsto 2x - 1$$

Man kann sagen:

Jedem x ...

... wird ein y zugeordnet,
das berechnet wird durch ...

$$2x - 1$$

Oder man sagt:

x ...

... wird abgebildet auf ...

$$2x - 1$$

(2) Funktionsterm

$$f(x) = y \quad \text{z. B.} \quad f(x) = 2x - 1$$

Möchte ich den **Funktionswert (y-Wert)** an einer bestimmten **Stelle x (x-Wert)** wissen, setze ich ihn in den Funktionsterm ein. Dadurch wird in diesem Beispiel der x -Wert verdoppelt und anschließend eins davon abgezogen. Das Ergebnis ist dann der zum eingesetzten x -Wert gehörende y -Wert. Beispiel:

An der Stelle $x = 2$ erhalte ich den Funktionswert („f von 2“) $f(2) = 2 \cdot 2 - 1$ also $f(2) = 3$ oder $y = 3$.

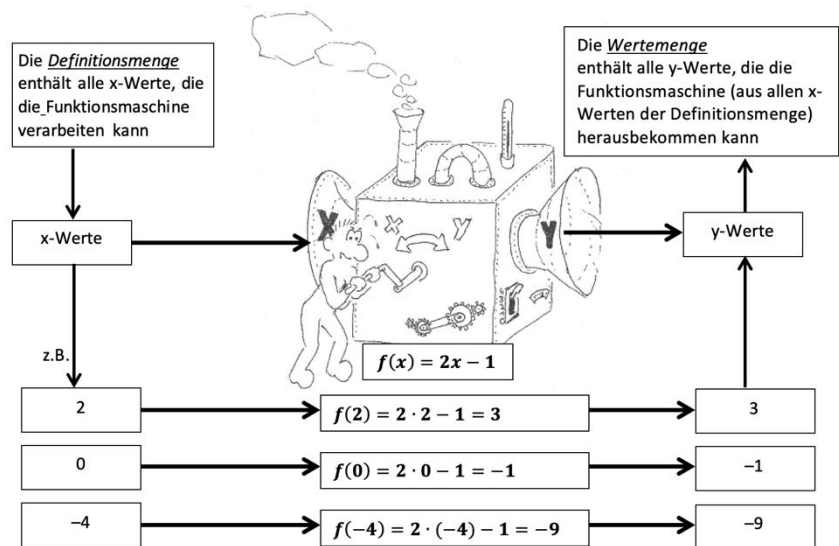
Zum x -Wert $x = 0$ erhalte ich den Funktionswert („f von 0“) $f(0) = 2 \cdot 0 - 1$ also $f(0) = -1$ oder $y = -1$.

(3) Funktionsgleichung

$$y = f(x) \quad \text{z. B.} \quad y = 2x - 1$$

Wie bei (2) erhalte ich zum Beispiel für den Wert $x = -4$ den y -Wert $y = 2 \cdot (-4) - 1$ also $y = -9$.

Man kann sich eine sogenannte **Funktionsmaschine** vorstellen, in die erlaubte x -Werte hineingesteckt werden und die zugehörigen y -Werte herauskommen:



(4) Graph G_f bzw. Schaubild der Funktion

Mithilfe des Funktionsterms kann eine Wertetabelle für x und $y = f(x)$ erstellt werden. Die Wertepaare $(x|y)$ aus (2) und (3) können als Koordinaten der Punkte $A(-4|-9)$, $B(0|-1)$ und $C(2|3)$ im Koordinatensystem interpretiert werden.

Alle möglichen Wertepaare ergeben den Graphen G_f dieser Funktion.

(In diesem Beispiel ist es eine Gerade.)

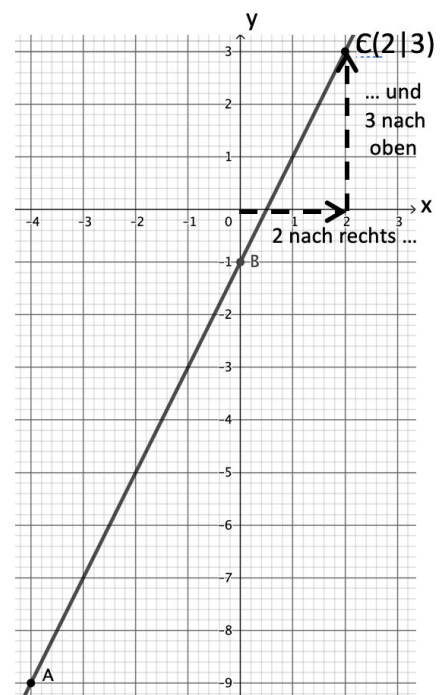
Wertetabelle

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = f(x)$	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5

Punkte $A(-4|-9)$

$B(0|-1)$

$C(2|3)$



Teil 2:

Wichtige Aufgabenstellungen

anhand der Beispiele

$$a(x) = -\frac{1}{x-1},$$

$$c(x) = \frac{1}{x+2}$$

$$b(x) = x^2 - 1$$

$$d(x) = -0,25x + 3$$

1. Bestimme die Definitionsmenge

- Die Funktion a ist an der Stelle $x = 1$ nicht definiert,

weil der Nenner sonst _____ wird, also darf ich für x alles außer 1 einsetzen: $D_a = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$

- In die Funktion b darf ich für x alle möglichen Zahlen einsetzen, also $D_b = \mathbb{Q}$

- Die Funktion c _____

$$D_c =$$

- In die Funktion d _____

$$D_d =$$

2. Funktionswert berechnen Ermittle den Funktionswert von ...

... der Funktion a an der Stelle $x = -3$: $a(-3) = -\frac{1}{-3-1}$ $= -\frac{1}{-4}$ $= \frac{1}{4} = 0,25$ Bei Funktion a ist an der Stelle $x = -3$ der Funktionswert $y = 0,25$	... der Funktion b an der Stelle $x = -2$: Funktion b hat an der Stelle $x = -2$ den Funktionswert _____.	... der Funktion c an der Stelle $x = 0,5$: Bei Funktion c ist an der Stelle _____ der Funktionswert _____.	... der Funktion d an der Stelle -5: Bei Funktion d ist an der _____ der Funktionswert= _____.
---	---	--	---

3. Stelle berechnen Ermittle die Stelle (=x-Wert), an der...

... bei der Funktion a der Funktionswert $f(x) = -4$ ist: $-4 = -\frac{1}{x-1} \quad \cdot (x-1)$ $-4 \cdot (x-1) = -1 \quad : (-4)$ $x-1 = \frac{1}{4} \quad +1$ $x = \frac{5}{4} = 1,25$ Die Funktion a hat an der Stelle $x = 1,25$ den Funktionswert $y = -4$.	... die Funktion b den Funktionswert 99 hat: Die Funktion b hat an den Stellen $x = 10$ und $x = -10$ den Wert $y = 99$.	... bei der Funktion c der Funktionswert $\frac{1}{4}$ ist. Die Funktion c hat an der Stelle $x = \frac{1}{4}$ den Funktionswert $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$	... bei der Funktion d der Funktionswert -2 ist. Die Funktion d hat an der Stelle $x = -2$ den Funktionswert $y = -2$.
---	---	--	---

4. Nullstellen berechnen

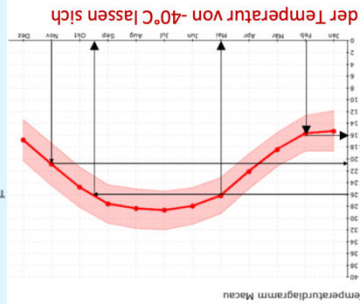
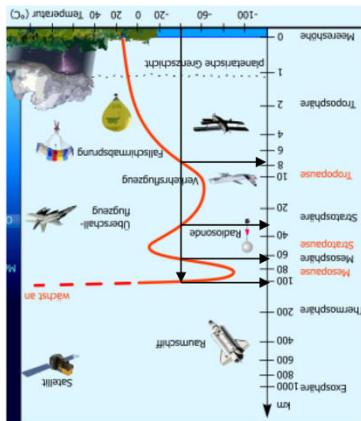
Eine **Nullstelle** ist der x -Wert, für den der Funktionswert 0 wird bzw. der Graph die x -Achse schneidet. Löse dafür die Gleichung $f(x) = 0$ nach x auf.

Bestimme die Nullstelle ...

... der Funktion b: $0 = x^2 - 1 \quad +1$ $1 = x^2 \quad \text{Lösen durch Nachdenken:}$ Hier gibt es zwei Lösungen, $x = -1$ oder $x = 1$ Die Funktion b hat an den Stellen $x = -1$ und $x = 1$ jeweils eine Nullstelle.	... der Funktion d: Die Funktion d hat an der Stelle $x = -2$ eine Nullstelle.
--	---

Anmerkung: Die Funktionen a und c haben keine Nullstellen.

Lösungen Teil 1:



Aufgabe 2:
Dem Monat November wird die Temperatur von ca. 20,7°C, dem Februar von knapp 16°C zugeordnet.
Die Zuordnung Monat $\mapsto$ mittlere Temperatur ist eine Funktion, weil jedem Monat genau eine Durchschnittstemperatur zugeordnet wird.
Umgekehrt: Der Temperatur von ungefähr 26° kann man zwei oder drei Monate zuordnen nämlich Mai und Ende September bzw. Anfang Oktober. Die Zuordnung Temperatur $\mapsto$ Monat ist also keine Funktion.
Aufgabe 3:
Die Zuordnung Temperatur $\mapsto$ Höhe ist keine Funktion, weil z.B. zu der Temperatur von -40°C lassen sich vier verschiedene Höhen ablesen.
Die Zuordnung Höhe $\mapsto$ Temperatur ist eine Funktion, weil zu jeder Höhe (bis etwa 100 km) gibt es genau einen Temperaturwert.

Lösungen Teil 2:

1. Bestimme die Definitionsmenge

- Die Funktion a ist an der Stelle $x = 1$ nicht definiert, weil der Nenner sonst Null wird, also darf ich für x alles außer 1 einsetzen:
- In die Funktion b darf ich für x alle möglichen Zahlen einsetzen, also
- Die Funktion c ist an der Stelle $x = -2$ nicht definiert, weil der Nenner sonst Null wird, also darf ich für x alles außer -2 einsetzen:
- In die Funktion d darf ich für x alle möglichen Zahlen einsetzen, also

$$D_a = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$$

$$D_b = \mathbb{Q}$$

$$D_c = \mathbb{Q} \setminus \{-2\}$$

$$D_d = \mathbb{Q}$$

2. Funktionswert berechnen

Ermittle den Funktionswert von ...

... der Funktion b an der Stelle $x = 0,5$: $b(-2) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$ Bei Funktion b ist an der Stelle $x = -2$ der Funktionswert $f(-2) = 3$.	... der Funktion c an der Stelle $x = 0,5$: $a(0,5) = \frac{1}{0,5+2} = \frac{1}{2,5} = \frac{2}{5} = 0,4$ Funktion c hat an der Stelle $x = 0,5$ den Funktionswert $y = 0,4$	... der Funktion d an der Stelle -5: $d(-5) = -0,25 \cdot (-5) + 3 = 1,25 + 3 = 4,25$ Bei Funktion d ist an der Stelle $x = -5$ der Funktionswert $y = 4,25$.
--	--	--

3. Stelle berechnen

Ermittle die Stelle, an der ...

... die Funktion b den Funktionswert $y = 99$ hat. $99 = x^2 - 1 \quad +1$ $100 = x^2$ Es gibt zwei Zahlen, die die Gleichung erfüllen: $x = 10$ und $x = -10$. Die Funktion c hat an der Stelle $x = 2$ den Funktionswert $f(2) = \frac{1}{4}$	... bei der Funktion c der Funktionswert $y = \frac{1}{4}$ ist. $\frac{1}{4} = \frac{1}{x+2} \quad \cdot (x+2)$ $\frac{1}{4} \cdot (x+2) = 1 \quad \cdot 4$ $x+2 = 4 \quad -2$ $x = 2$ Die Funktion c hat an der Stelle $x = 2$ den Funktionswert $f(2) = \frac{1}{4}$	... bei der Funktion d der Funktionswert $y = -2$ ist. $-2 = -0,25x + 3 \quad +0,25x$ $-2 + 0,25x = 3 \quad +2$ $0,25x = 5 \quad \cdot 4$ $x = 20$ Die Funktion d hat an der Stelle $x = 20$ den Funktionswert $y = f(20) = -2$
---	---	--

4. Nullstellen berechnen

Bestimme die Nullstelle ...

... der Funktion d: $0 = -0,25x + 3$ $0,25x = 3$ $x = 12$ Die Funktion d hat an der Stelle $x = 12$ eine Nullstelle.
