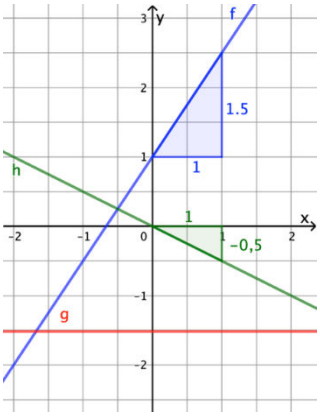
Mathematik am Peutinger-Gymnasium

Fkt 2 Grundwissen

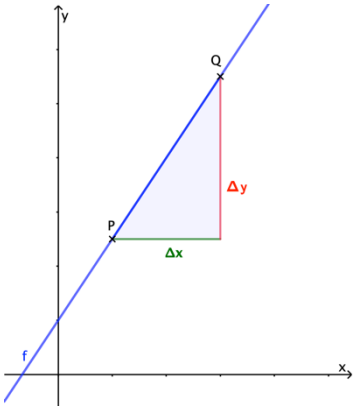
Lineare Funktionen (Jgst. 8)

Eine Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = mx + t$ heißt lineare Funktion. Ihr Graph ist eine Gerade.
Der Parameter m gibt die Steigung der Geraden an, der Parameter t heißt y-Achsenabschnitt. Der Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse ist $(0|t)$.



m kann über mithilfe eines Steigungsdreiecks veranschaulicht werden.
Für $m > 0$ steigt die Gerade,
für $m = 0$ ist die Gerade parallel zur x-Achse
für $m < 0$ fällt die Gerade.

$f(x) = 1{,}5x + 1$
$g(x) = -1{,}5$
$h(x) = -0{,}5x$



Aufstellen einer Geradengleichung aus zwei gegebenen Punkten:
Durch die Angabe von zwei Punkten ist eine Gerade genau festgelegt.
Die Steigung m berechnet man mit $\boldsymbol{m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}}$

Mit $P(1|2{,}5)$ und $Q(3|5{,}5)$: $\boldsymbol{m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5{,}5-2{,}5}{3-1} = \frac{3}{2} = 1{,}5}$.

Den y-Achsenabschnitts t erhält man mithilfe der Funktionsgleichung $y = mx + t$. Setze dazu $\boldsymbol{m = 1{,}5}$ und die Koordinaten eines bekannten Punktes, z.B. $P(\mathbf{1}|\mathbf{2{,}5})$ ein und löse nach t auf:

$y = m \cdot x + t$
$2{,}5 = 1{,}5 \cdot 1 + t \Rightarrow t = 1$ $\quad \Rightarrow f(x) = 1{,}5x + 1$

Wichtige Aufgabenstellungen:

Bestimme die Achsenschnittpunkte:

- Den **Schnittpunkt S_y mit der y-Achse** kann man ablesen: $S_y(0|t)$.
- Den **Schnittpunkt S_x mit der x-Achse** erhält man durch die Berechnung der Nullstelle: Löse die Gleichung $f(x) = 0$ nach x auf.

Beispiel: $g(x) = -0{,}25x - 2$
$S_y\,(0|-2)$

$-0{,}25x - 2 = 0 \mid +2$
$-0{,}25x = 2 \quad \mid \cdot(-4)$
$x = -8 \quad S_x(-8|0)$

Punktprobe: Liegt der Punkt P auf/über/unterhalb der Geraden h?
Setze die x-Koordinate von P in die Geradengleichung ein und vergleiche diesen Wert mit der y-Koordinate von P.
h(x) = y_g < y_p: P liegt oberhalb von h
h(x) = y_g > y_p: P liegt unterhalb von h

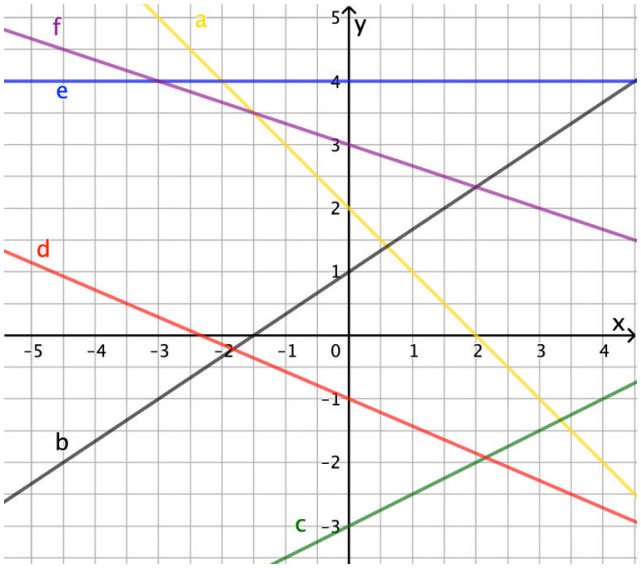
Beispiel: $P(4|7)$; $h(x) = 2x - 5$
$h(4) = 2 \cdot 4 - 5 = 8 - 5 = 3 < 7 = y_P$
=> P liegt oberhalb der Geraden h

Bestimme gemeinsame Punkte von zwei Geraden:
Setze die Funktionsterme der beiden Geradengleichungen gleich und löse nach x auf. Bestimme die y-Koordinate, indem du die x-Koordinate in einen der Funktionsterme einsetzt.
Je nach Lage der Geraden zueinander erhältst du ein, zwei oder unendlich viele Schnittpunkte:

Beispiel: $g(x) = h(x)$
$-0{,}5x - 2 = 2x - 7 \quad \mid +2 \mid -2x$
$-2{,}5x = -5 \quad \mid : (-2{,}25)$
$x = 2$
$y = -0{,}5 \cdot 2 - 2 = -3$
$S(2|-3)$

Aufgaben:

1a) Lies die Gleichungen der Geraden mithilfe geeigneter Steigungsdreiecke ab. (Abb. rechts)



b) Gegeben sind die Punkte $A(-2|1)$, $B(-4|-2), C(3|-1), D(2|-3)$ in einem Koordinatensystem. Bestimme die Funktionsgleichungen der Geraden AB, AC und CD und ermittle die Schnittpunkte der Geraden mit den Koordinatenachsen.
Überprüfe graphisch, z.B. mit Geogebra.

c) Spiegle die Gerade mit der Gleichung $y = 3x + 6$ einmal an der x-Achse und einmal an der y-Achse. Gib die Gleichung der beiden Spiegelgeraden an.

d) Liegen die Punkte $P(1|3{,}5), Q(2|5), R(9|-1{,}5)$ oberhalb/auf/unterhalb der Geraden g mit der Gleichung $y = -0{,}5x + 4$? Entscheide durch Rechnung und überprüfe graphisch.

2. Bestimme die Schnittpunkte der beiden Geraden zunächst rechnerisch, überprüfe dann durch die graphische Lösung:

a) $g: y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$ und $h: y = 3x - 1$ b) $g:\ y = -3x + 4$ und $h: y = -\frac{1}{3}x - 2\frac{2}{3}$

c) Wie liegen die Geraden aus Teilaufgabe c zueinander?

3. Löse rechnerisch und graphisch! a) $3x - 1 > -2x + 4$ b) $-2{,}5 + 0{,}5x \geq 2(x - 0{,}5)$

Aufgabe 1

$a(x) = -x + 2$ $b(x) = \frac{2}{3}x + 1$ $c(x) = \frac{1}{2}x - 3$

$d(x) = -\frac{3}{7}x - 1$ $e(x) = 4$ $f(x) = -\frac{1}{3}x + 3$

b) $AB: y = 1{,}5x + 4$ $S_x\left(-\frac{8}{3}\middle|0\right)$ $S_y(0|4)$

$AC: y = -0{,}4x + 0{,}2$ $S_x(0{,}5|0)$ $S_y(0|0{,}2)$

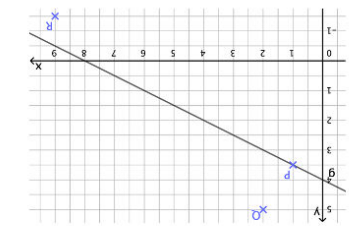
$CD: y = 2x - 7$ $S_x(3{,}5|0)$ $S_y(0|-7)$

c) Spiegelung an der x-Achse: $y = -3x - 6$;
Spiegelung an der y-Achse: $y = -3x + 6$

d) $P(1|3{,}5)$ $g(1) = 3{,}5 = 3{,}5\ (= y_P)$
P liegt auf der Geraden g

$Q(2|5)$ $g(2) = 3 < 5.\ (= y_Q)$
Q liegt oberhalb der Geraden g

$R(9|-1{,}5)$ $g(9) = -0{,}5 > -1{,}5\ (= y_R)$
R liegt unterhalb der Geraden g



2. a) $\frac{4}{3}x + \frac{7}{3} = 3x - 1 \quad | -\frac{4}{3}x + 1$

$\frac{10}{3} = \frac{5}{3}x \quad | \cdot \frac{5}{3}$

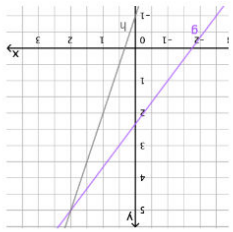
$2 = x$

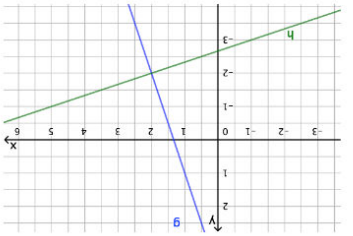
$g(2) = 5 \Rightarrow$ Schnittpunkt $(2|5)$

b) $-3x + 4 = -\frac{1}{3}x - 2\frac{2}{3} \quad | + \frac{1}{3}x - 4$

$x = 2$ $g(2) = -2 \Rightarrow$ Schnittpunkt $(2|-2)$

c) Die Geraden sind senkrecht zueinander, da gilt:
$m_g = -\frac{1}{m_h}$ bzw. $m_g \cdot m_h = -1$





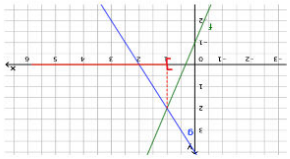
3. a) $3x - 1 > -2x + 4 \quad | + 2x + 1$

$5x > 5 \quad | : 5$

$x > 1 \Rightarrow L =]1; \infty[$

Deutung: Der Graph von f liegt für $x > 1$ über dem Graphen von g; die Funktionswerte von f sind für $x > 1$ größer als die Funktionswerte von g.

Skizziere die Geraden mit den Gleichungen $g(x) = -2x + 4$ und $f(x) = 3x - 1$

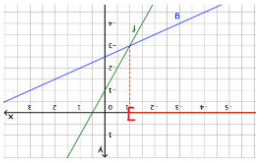


Die Lösung wird an der x-Achse markiert (rot)

b) $-2{,}5 + 0{,}5x \geq 2(x - 0{,}5)$

$-2{,}5 + 0{,}5x \geq 2x - 1 \quad | - 2x + 2{,}5$

$-1{,}5x \geq 1{,}5 \quad |: (-1{,}5)$

$x \leq -1 \Rightarrow L =]-\infty; -1]$

Skizziere die Geraden mit den Gleichungen $g(x) = -2{,}5 + 0{,}5x$; $f(x) = 2(x - 0{,}5)$