



Gebrochen-rationale Funktionen; Proportionalität (Jgst. 8)

Eine Funktion, deren Term die Form $\frac{a}{x+b} + c$ hat, heißt **elementare gebrochen-rationale Funktion**. Ihr Graph heißt **Hyperbel**.

Einfachste Form: $f(x) = \frac{a}{x}$

Nullstelle des Nenners

Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Der Graph von f hat die **waagrechte Asymptote** $y = 0$, der Graph schmiegt sich für sehr große bzw. sehr kleine x -Werte an diese Asymptote an.

In der Nähe der **Definitionslücke** $x = 0$ werden die Funktionswerte sehr groß bzw. sehr klein, der Graph nähert sich an die **senkrechte Asymptote** $x = 0$ an.

Für $a > 0$ liegen die Äste im I. und III. Quadranten (Abb. 1).

für $a < 0$ wird der Graph an der y -Achse gespiegelt, die Äste liegen dann im II. und IV. Quadranten (Abb. 2).

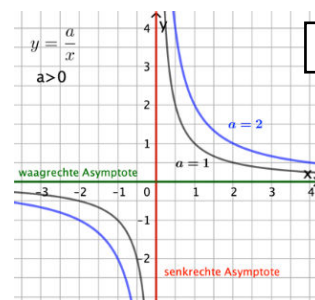


Abb.1

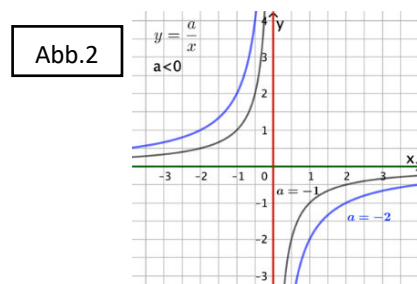


Abb.2

Funktionen mit dem Funktionsterm $g(x) = \frac{a}{x+b} + c$

Der Graph der Funktion g geht aus dem Graphen von f hervor durch

Verschiebung um b nach links ($b > 0$) oder rechts ($b < 0$)

Verschiebung um c nach oben ($c > 0$) oder unten ($c < 0$).

Die Asymptoten werden dementsprechend mitverschoben, die Definitionsmenge ist $D = \mathbb{R} \setminus \{-b\}$

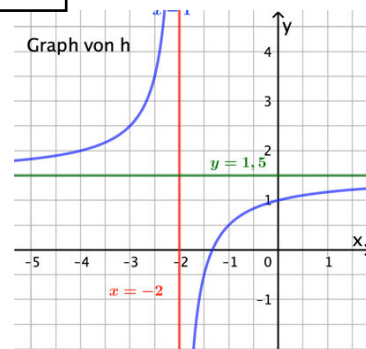
Beispiel (Abb. 3): $h(x) = \frac{-1}{x+2} + 1,5$; $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Der Graph von h ist gegenüber dem Graphen zur Gleichung $y = -\frac{1}{x}$ um 2 nach links verschoben und um 1,5 nach oben verschoben.

Die Asymptoten sind die Geraden mit den Gleichungen $x = -2$ und $y = 1,5$.

Wegen $a = -1 < 0$ verlaufen die Äste der Hyperbel im II. und IV. „Quadranten des Asymptotenkreuzes“.

Abb.3



Proportionalitäten

Bei einer **direkten proportionalen** Funktion wird dem Doppelten, Dreifachen, Vierfachen, ... der einen Größe x auch das Doppelte, Dreifache, Vierfache, ... der anderen Größe y zugeordnet. Damit ist sie ein Sonderfall der linearen Funktion mit $x \mapsto p \cdot x$.

$p = \frac{y}{x}$ heißt **Proportionalitätsfaktor**, die Wertepaare $(x|y)$ sind somit **quotientengleich**.

Wird umgekehrt dem Doppelten, Dreifachen, Vierfachen, ... der einen Größe x die Hälfte, ein Drittel, ein Viertel der anderen Größe y zugeordnet, so spricht man von einer **indirekt proportionalen** Funktion. Sie ist ein Sonderfall der gebrochen-rationale Funktion mit der Gleichung $y = \frac{a}{x}$. Aus dieser Gleichung erhält man $y \cdot x = a$, was gleichbedeutend mit der **Produktgleichheit** der Wertepaare $(x|y)$ ist.

Aufgaben:

1) Beschreibe, wie der Graph der Funktion f aus dem Graphen der Funktion g hervorgeht:

a) $f(x) = \frac{2}{x-4} + 2$

$g(x) = \frac{2}{x}$

b) $f(x) = \frac{-1}{x+4} - 1$

$g(x) = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = \frac{2}{x-1} + 2$

$g(x) = \frac{2}{x+1} - 3$

- 2) Skizziere den ungefähren Verlauf des Graphen der Funktion g und gib seine Definitionsmenge und die Gleichungen der Asymptoten an.

a) $f(x) = \frac{1}{x+2} - 1$

b) $f(x) = \frac{-1}{x-2} + 1$

- 3) Stelle den Term der Funktion h auf. Folgende Eigenschaften von Graph bzw. Funktion sind bekannt:
Der Graph verläuft durch den Punkt A(2|-2); die waagrechte Asymptote hat die Gleichung $y = 1$. Die Definitionsmenge ist $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

- 4) Von den drei angegebenen Tabellen gehört genau eine zu einer direkten und eine andere zu einer indirekten Proportionalität. Entscheide, welche Tabelle zur direkten, welche zur indirekten Proportionalität gehört. Bestimme jeweils den fehlenden Wert in der Tabelle.

x	3,2	4,8	5
y	8	12	?

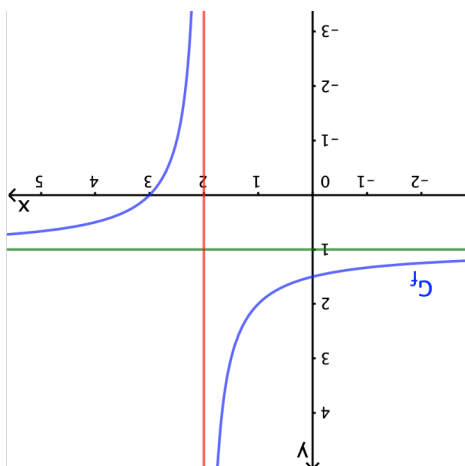
x	2,4	4,8	6
y	8	12	?

x	2,4	3	?
y	8	6,4	4,8

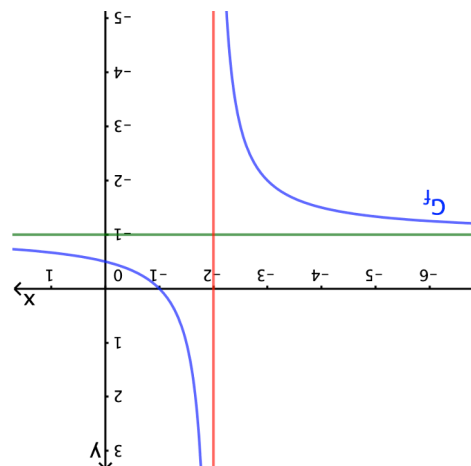
Lösungen:

- 1a) Der Graph der Funktion g wird um vier Einheiten in Richtung der positiven x-Achse (nach rechts) verschoben und um zwei Einheiten in Richtung der positiven y-Achse (nach oben)
b) Der Graph der Funktion g wurde zunächst an der x-Achse gespiegelt, dann um vier Einheiten in Richtung der negativen x-Achse (nach links) und um eine Einheit in Richtung der negativen y-Achse (nach unten) verschoben. Der Graph verläuft im II. und IV. Quadranten des „Asymptotenkreuzes“;
c) Der Graph der Funktion g wird um zwei Einheiten in Richtung der positiven x-Achse (nach rechts) verschoben und um fünf Einheiten in Richtung der positiven y-Achse (nach oben).

- b) Skizziere zunächst die waagrechte Asymptote $y = 1$ und die senkrechte Asymptote $x = 2$. Der Graph verläuft im I. und III. Quadranten des „Asymptotenkreuzes“



- 2a) Skizziere zunächst die waagrechte Asymptote $y = -1$ und die senkrechte Asymptote $x = -2$. Der Graph verläuft im I. und III. Quadranten des „Asymptotenkreuzes“



- 3) Der Term hat die Struktur $h(x) = \frac{x+b}{a} + c$

waagrechte Asymptote $y = 1$

Definitionsmenge $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

Bestimmung von a mithilfe des gegebenen Punktes A(2|-2)

$$\begin{aligned} c &= 1 \\ b &= -3 \\ y &= \frac{x + (-3)}{a} + 1 \\ -2 &= \frac{2 - 3}{a} + 1 \quad | -1 \\ -3 &= \frac{-1}{a} \quad | \cdot (-a) \\ -3a &= -1 \\ a &= \frac{1}{3} \\ \Rightarrow h(x) &= \frac{x - 3}{3} + 1 \end{aligned}$$

4) Direkte Proportionalität

x	3,2	8	12
y	5	4,8	12,5

keine Prop.

x	2,4	4,8	12
y	6	12	?

Indir. Proportionalität

x	2,4	8	6,4
y	3	4,8	?

Produktgleichheit

z. B. Quotientengleichheit