



Quadratische Funktionen und ihre Graphen (Jgst. 9)

1. Normalparabel und quadratische Funktionen in Scheitelpunktform

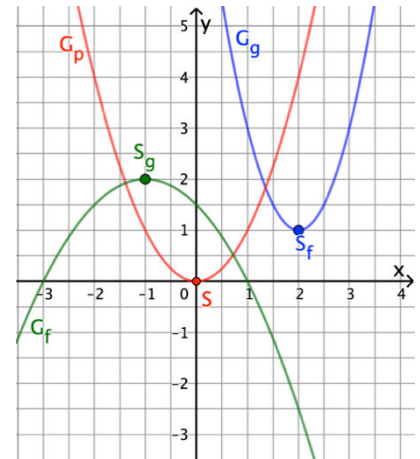
Der Graph der Funktion p mit $p(x) = x^2$ heißt **Normalparabel**. Ihr Scheitel S liegt im Ursprung, sie ist symmetrisch zu y-Achse.

Funktionen mit der Gleichung $y = a(x - x_S)^2 + y_S$ heißen quadratische Funktionen in **Scheitelpunktform**. Ihr Scheitel liegt in $S(x_S | y_S)$.

Alle Parabeln gehen aus der Normalparabel durch Verschiebung in x-Richtung und in y-Richtung hervor, der **Öffnungsfaktor** a verändert zudem die Öffnung der Parabel:

Ist $a > 0$, ist die Parabel nach oben geöffnet,
für $a < 0$ ist sie nach unten geöffnet.

Ist $|a| < 1$, ist die Parabel weiter geöffnet als die Normalparabel,
ist $|a| > 1$ ist sie enger als die Normalparabel.



$$g(x) = (x - 2)^2 + 1$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 + 1$$

2. Quadratische Funktionen in Normalform, Nullstellen

Durch Ausmultiplizieren erhält man aus der Scheitelpunktform die **Normalform** der Funktionsgleichung: $y = ax^2 + bx + c$

Quadratische Funktionen können keine, eine oder zwei **Nullstellen** haben. Diese erhält man mithilfe der

$$\text{Lösungsformel } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Das Vorzeichen des Ausdrucks $D = b^2 - 4ac$ (**Diskriminante**) bestimmt die Anzahl an Nullstellen.

Der Term einer quadratischen Funktion kann auch mithilfe ihrer Nullstellen – falls vorhanden – angegeben werden:

Sind x_1 und x_2 Nullstellen, so ist $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ die **Nullstellenform** der quadratischen Funktion.

Die x-Koordinate des **Scheitels** kann man mit $x_S = \frac{-b}{2a}$ oder $x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}$ berechnen.

Der Parameter a gibt auch hier den Öffnungsfaktor an.
 $c = f(0)$ gibt den y-Achsenabschnitt an.

Ist $D > 0$ hat die Funktion zwei Nullstellen, für $D = 0$ erhält man eine Nullstelle, gilt $D < 0$ so hat die Funktion keine Nullstelle.

Wichtige Aufgabenstellungen:

- a) Bestimme die Funktionsgleichung der Parabel (in Scheitelpunktform), deren Scheitel im Punkt $(-2 | -2,5)$ liegt und die durch den Punkt $P(1 | -1,5)$ verläuft.

- b) Berechne Achsenschnittpunkte und Scheitel der Parabel f mit $f(x) = 1,5x^2 - 6x + 4,5$

Da der Scheitel gegeben ist, nutze die Scheitelpunktform:
 $y = a(x - (-2))^2 - 2,5 = a(x + 2)^2 - 2,5$

Nutze die Koordinaten von P: $-1,5 = a(1 + 2)^2 - 2,5$
und löse nach a auf: $a = -\frac{1}{9} \Rightarrow y = -\frac{1}{9}(x + 2)^2 - 2,5$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 4,5 \Rightarrow S_y(0 | 4,5)$

Schnittpunkte mit der x-Achse: $f(x) = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1,5 \cdot 4,5}}{2 \cdot 1,5} \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 3$$

$$\Rightarrow S_{x_1}(1 | 0); S_{x_3}(3 | 0)$$

$$\text{Scheitel } x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1,5} = 2; y_S = f(2) = -1,5 \Rightarrow S(2 | -1,5)$$

Aufgaben Grundwissen quadratische Funktionen

- Bestimme den Funktionsterm der Parabeln p_1 und p_2 , die durch die gegebenen Punkte verläuft.
- Bestimme alle markanten Punkte (Schnittpunkte mit Achsen, Scheitel) der Parabel, die gegeben ist durch

a) $g(x) = -2x^2 + 3x + 5$

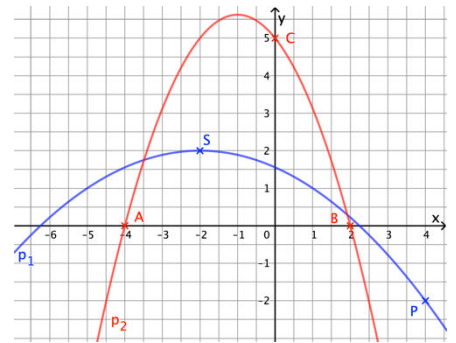
b) $h(x) = \frac{1}{2}(x - 4)^2 - 2$

c) $k(x) = \frac{3}{4}(x - 1)(x + 3)$

- Bestimme die Schnittpunkte der Geraden g mit der Parabel p für...

a) $g(x) = 2x + 2$ und $p(x) = -2x^2 + 3x + 5$

b) $g(x) = 4x - 19$ und $p(x) = 2(x - 4)^2 - 1$



Mit $g(5) = 1$ oder $p(5) = 1$ erhält man den Berührungspunkt (5 | 1)

$$\Rightarrow x_{1,2} = 5$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 50}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm 0}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 20x + 50 = 0$$

$$4x - 19 = 2x^2 - 16x + 31$$

$$b) \quad 4x - 19 = 2(x - 4)^2 - 1$$

erhält man die Schnittpunkte (1,5 | 5); (-1 | 0)

$$\text{Mit } g(1,5) = 5 \text{ und } g(-1) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 1,5; x_2 = -1$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm 5}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 = 0$$

$$a) \quad 2x + 2 = -2x^2 + 3x + 5$$

Lösungsformel.

- Setze die Terme gleich, bringe alles auf eine Seite und löse die so entstandene quadratische Gleichung mit der

Schnittpunkte mit x-Achse: (1 | 0) und (-3 | 0); Schnittpunkt mit y-Achse: (0 | - $\frac{4}{9}$); Scheitel (-1 | -3)

c) Nullstellen einfach ablesen, Scheitel liegt genau zwischen den Nullstellen: $x_s = \frac{x_1 + x_2}{2}$

Schnittpunkte mit x-Achse: (2 | 0) und (6 | 0); Schnittpunkt mit y-Achse: (0 | 6); Scheitel (4 | -2)

b) Scheitel direkt ablesen, für Nutzung der Lösungsformel ausmultiplizieren in Normalform $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$

Schnittpunkte mit x-Achse: (-1 | 0) und (2,5 | 0); Schnittpunkt mit y-Achse: (0 | 5); Scheitel ($\frac{3}{8}$ | $\frac{49}{8}$)

2. a) Nullstellen mithilfe der Lösungsformel berechnen, Scheitel z.B. mit $x_s = -\frac{a}{b}$

$$\Rightarrow a = -\frac{8}{5} \Rightarrow p_2(x) = -\frac{8}{5}(x - 2)(x + 4)$$

auflösen: $5 = -8a$

$$(0 | 5): \quad 5 = a(0 - 2)(0 + 4)$$

$$(2 | 0), (-4 | 0): \quad y = a(x - 2)(x - (-4))$$

$$\text{Ansatz Nullstellenform: } y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

b) rot: gegeben A(2 | 0), B(-4 | 0); C(0 | 5)

1. blau: gegeben S(-2 | 2); P(4 | -2)

$$\text{Ansatz Scheitelform: } y = a(x - x_s)^2 + y_s$$

$$S(-2 | 2): \quad y = a(x - (-2))^2 + 2$$

$$P(4 | -2): \quad -2 = a(4 + 2)^2 + 2$$

$$\text{auflösen: } -2 = 36a + 2$$

$$-4 = 36a \Rightarrow a = -\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow p_1(x) = -\frac{1}{9}(x + 2)^2 + 2$$