



Sinus- und Kosinusfunktion (Jgst. 10)

1. Grundlegendes

	Funktions-term	Graph	D_f	W_f	S_y	Nullstellen	Periodenlänge
Sinus-funktion	$f(x) = \sin(x)$		$\mathbb{R}$	$[-1; 1]$	$(0 0)$	$k\pi$ (für $k \in \mathbb{Z}$) Also $\dots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$	2π
Kosinus-funktion	$f(x) = \cos(x)$		$\mathbb{R}$	$[-1; 1]$	$(0 1)$	$\frac{\pi}{2} + k\pi$ (für $k \in \mathbb{Z}$) Also $\dots, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$	2π

Hinweise:

- S_y ist der Schnittpunkt mit der y-Achse
- Periodenlänge von 2π bedeutet, dass sich die Funktionswerte in einem Abstand von 2π wiederholen

2. Allgemeine Sinusfunktion: $f(x) = a \cdot \sin(b(x + c)) + d$ (mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$)

2.1 Bedeutung der Parameter

a (= „Amplitude“)	b	c	d
1. Streckung/Stauchung in y-Richtung • $a > 1$: Graph mit Faktor a in y-Richtung gestreckt • $a < 1$: Graph mit Faktor a in y-Richtung gestaucht 2. Spiegelung an x-Achse • $a < 0$: Graph an x-Achse gespiegelt	1. Streckung/Stauchung in x-Richtung • $b > 1$: Graph mit Faktor b in x-Richtung gestaucht • $b < 1$: Graph mit Faktor b in x-Richtung gestreckt 2. Spiegelung an y-Achse • $b < 0$: Graph an y-Achse gespiegelt	Verschiebung in x-Richtung • $c > 0$: Graph wird um c Einheiten in negative x-Richtung (nach links) verschoben • $c < 0$: Graph wird um c Einheiten in positive x-Richtung (nach rechts) verschoben	Verschiebung in y-Richtung • $d > 0$: Graph wird um d Einheiten in positive y-Richtung (nach oben) verschoben • $d < 0$: Graph wird um d Einheiten in negative y-Richtung (nach unten) verschoben

Hinweis:

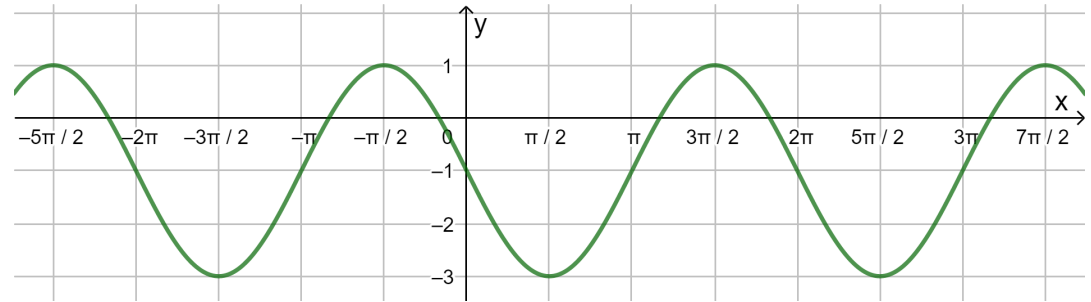
- $|a|$ bedeutet „Betrag von a “. Der Betrag einer Zahl ist immer entweder 0 oder positiv. Beispiele: $|2| = 2$ $|-2| = 2$ $|0| = 0$ $|-17| = 17$
- b bestimmt die Periodenlänge p der Funktion. Es gibt: $p = \frac{2\pi}{b}$

2.2 Beispiel:

$$f(x) = -2(\sin(x + \pi)) - 1$$

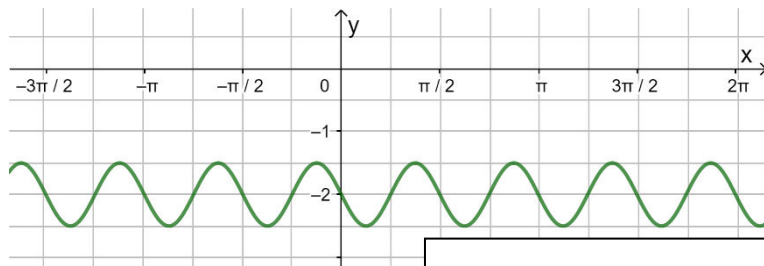
Der Graph der Sinusfunktion mit $h(x) = \sin(x)$ wird...

- mit Faktor 2 gestreckt in y-Richtung, die Amplitude ist 2
- gespiegelt an der y-Achse
- um π Einheiten in negative x-Richtung (nach links) verschoben
- um eine Einheit in negative y-Richtung (nach unten) verschoben

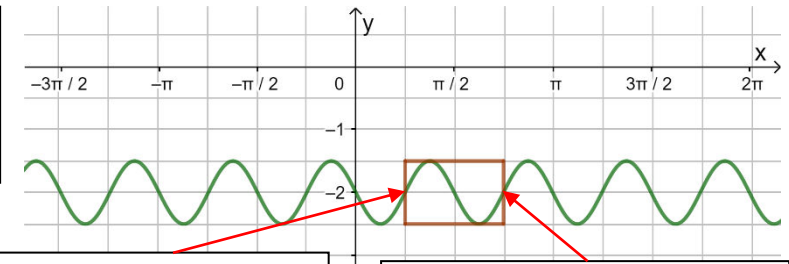


Achtung: Die Reihenfolge ist wichtig: Streckung/Stauchung bzw. Spiegelung muss immer vor Verschiebung beschrieben werden! (also: „a vor d und b vor c“!)

2.3 Musteraufgabe: Wie finde ich einen Funktionsterm zu einem vorgegebenen Graph:



Methode: „Kästchen zeichnen“
Zeichne ein Rechteck, das ausgehend von einer Ruhelage eine ganze Periode der Funktion enthält



Kästchenbeginn:
Suche einen Punkt, der auf halber Höhe zwischen maximalem und minimalem y-Wert liegt und an dem der Graph steigend verläuft. (Diesen Punkt nennt man Ruhelage.)
Beliebige Ruhelage im Graph: Hier: $\left(\frac{\pi}{4} \mid -2\right)$

Kästchenende:
Nächste Ruhelage im Graphen

Informationen aus dem „Kästchen“ ablesen:

- Informationen aus Kästchenbreite (in y-Richtung) und Kästchenlänge (in x-Richtung):

- Kästchenbreite: hier: 1 Einheit
- Kästchenlänge (gleichbedeutend mit Periodenlänge p): hier: $\frac{\pi}{2}$ (nämlich von $\frac{\pi}{4}$ bis $\frac{3\pi}{4}$)

$$\Rightarrow a = \frac{\text{Kästchenbreite}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$p = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

- Informationen aus der ersten Ruhelage $\left(\frac{\pi}{4} \mid -2\right)$:

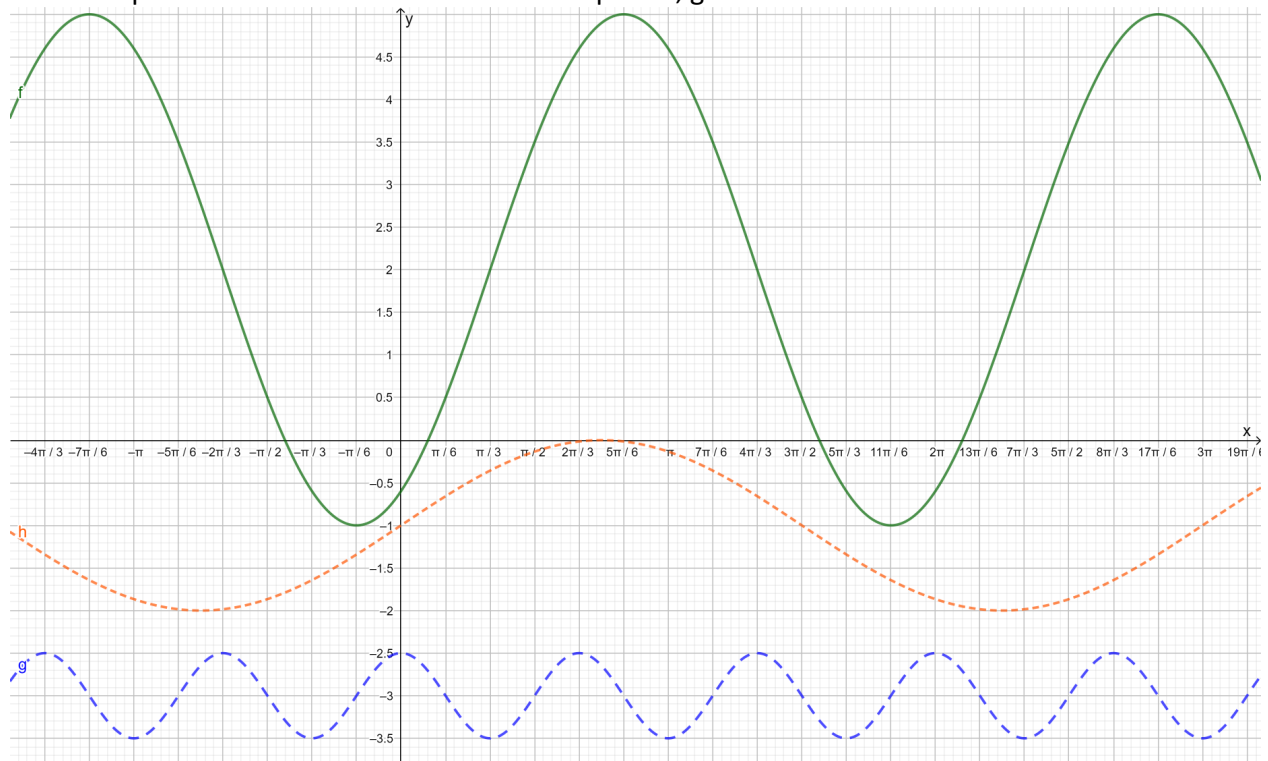
- x-Wert $\frac{\pi}{4}$: Graph im Vergleich zu $\sin(x)$ um $\frac{\pi}{4}$ Einheiten in x-Richtung nach rechts verschoben $\Rightarrow c = -\frac{\pi}{4}$
- y-Wert -2: Graph im Vergleich zu $\sin(x)$ um 2 Einheiten in y-Richtung nach unten verschoben $\Rightarrow d = -2$

Insgesamt: $f(x) = \frac{1}{2} \sin\left(4\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) - 2$

Hinweis: Es gibt mehrere Möglichkeiten, das Kästchen richtig zu setzen. Je nachdem, wo das Kästchen beginnt, kommt ggf. ein anderer (auch richtiger) Wert für den Parameter c heraus.

Aufgaben zum Thema „Sinus- und Kosinusfunktion“:

1. Beschreibe in Worten, wie jeweils der Graph der Funktion f aus dem Graphen der Sinusfunktion (mit dem Funktionsterm $g(x) = \sin(x)$) hervorgeht. Gib auch jeweils die Wertemenge und die Periodenlänge an!
a) $f(x) = 10\sin(-0,1x)$ b) $f(x) = \sin(2\pi(x - 0,5)) - 15$
2. Bestimme den passenden Funktionsterm zu den Graphen f, g und h!



3. Gib den Term einer Funktion an, ...
 - a) die die Wertemenge $W = [-1,75; 2,25]$ besitzt.
 - b) die eine Periodenlänge von 3 besitzt.

Lösungen:

Aufgaben zum Thema „Sinus- und Kosinusfunktion“:

1. Beschreibe in Worten, wie jeweils der Graph der Funktion f aus dem Graphen der Sinusfunktion (mit dem Funktionsterm $g(x) = \sin(x)$) hervorgeht. Gib auch jeweils die Wertemenge und die Periodenlänge an!

a) $f(x) = 10\sin(-0,1x)$

b) $f(x) = \sin(2\pi(x - 0,5)) - 15$

Der Graph G_f entsteht, indem man den Graph der Sinusfunktion (G_g)...

- mit dem Faktor 10 in y-Richtung streckt
- an der y-Achse spiegelt
- mit dem Faktor 0,1 in x-Richtung streckt

Hinweis: Reihenfolge ist hier egal.

- mit dem Faktor 2π in x-Richtung staucht
 - um 0,5 Einheiten in positive x-Richtung verschiebt
 - um 15 Einheiten in negative y-Richtung verschiebt.
- Hinweis zur Reihenfolge: Die Stauchung in x-Richtung muss vor der Verschiebung in x-Richtung beschrieben werden.

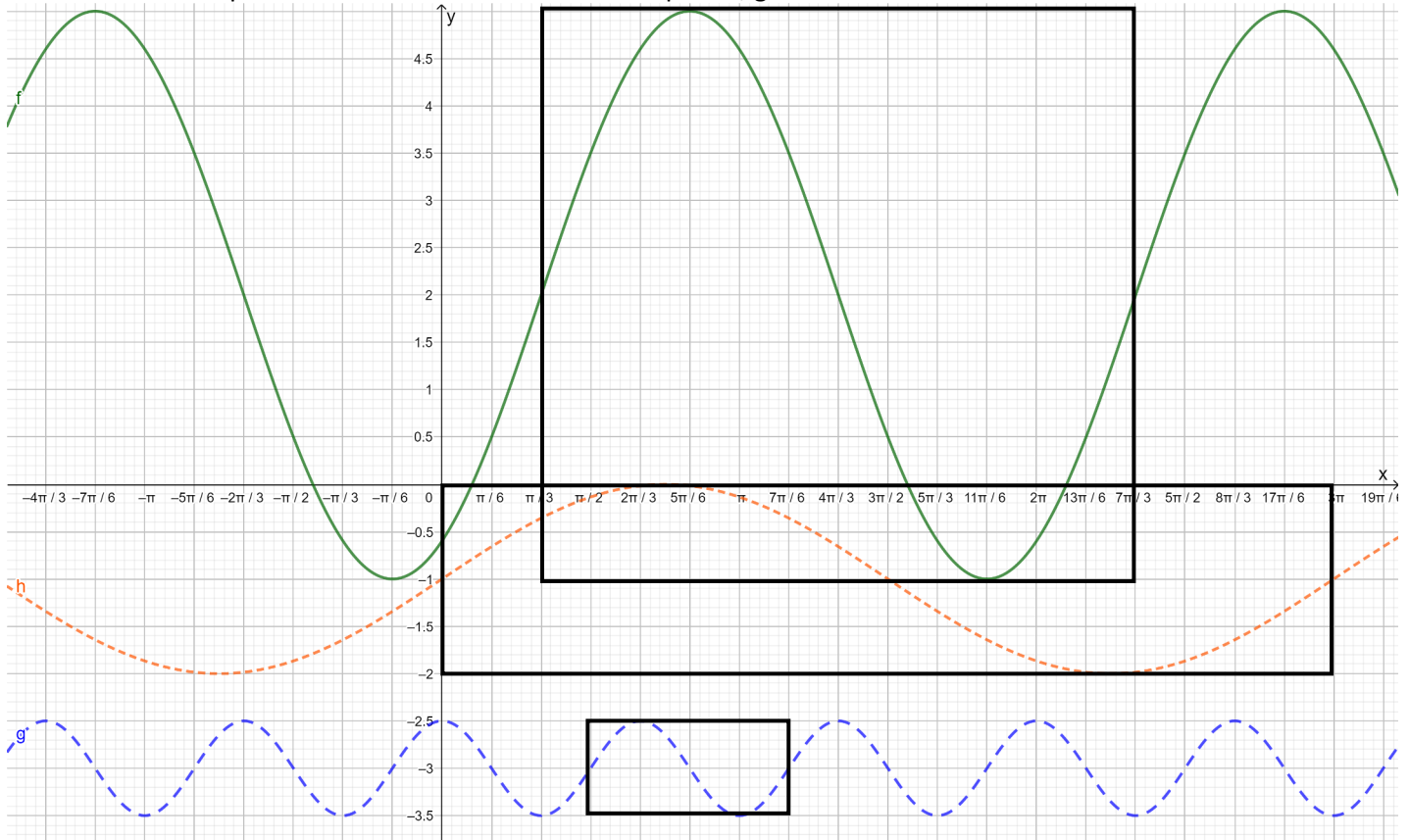
$$W_f = [-10; 10]$$

$$p = \frac{2\pi}{0,1} = 20\pi$$

$$W_f = [-14; -16]$$

$$p = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

2. Bestimme den passenden Funktionsterm zu den Graphen f, g und h!



$$f(x) = 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$$

nach Kästchenmethode: Ruhelage bei Kästchenbeginn: $P\left(\frac{\pi}{3} \mid 2\right)$

$$g(x) = 0,5 \sin\left(3\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) - 3$$

nach Kästchenmethode: Ruhelage bei Kästchenbeginn: $P\left(\frac{\pi}{2} \mid -3\right)$

$$h(x) = \sin\left(\frac{2}{3}x\right) - 1$$

nach Kästchenmethode: Ruhelage bei Kästchenbeginn: $P(0 \mid -1)$

3. Gib den Term einer Funktion an, ...

- a) die die Wertemenge $W = [-1,75; 2,25]$ besitzt.

Es gilt: $a = \frac{2,25 - (-1,75)}{2} = \frac{4}{2} = 2$ und $d = \frac{2,25 + (-1,75)}{2} = 0,25$ (restliche Parameter egal)

$\Rightarrow$ z. B. $f(x) = 2 \sin(x) + 0,25$

- b) die eine Periodenlänge von 3 besitzt.

Es gilt: $p = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow 3 = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow b = \frac{2\pi}{3}$ (restliche Parameter egal)

$\Rightarrow$ z. B. $f(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$