Mathematik am Peutinger-Gymnasium

Fkt 9 **Grundwissen**

Exponentielles Wachstum und Exponentialfkt (Jgst. 10)

Exponentielles Wachstum kann durch Funktionen der Form

$B: x \mapsto c \cdot a^x \quad$ mit $\quad c \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

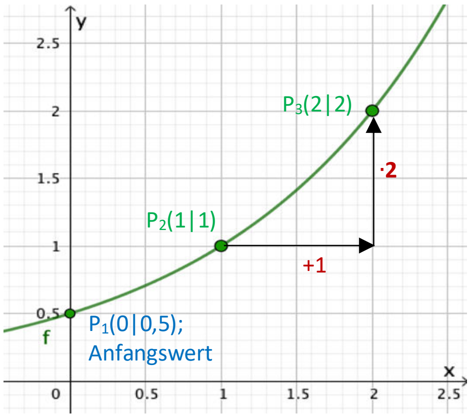
beschrieben werden.

Die Konstante c gibt den Anfangswert an. Es gilt: $B(0) = c$

Die Konstante a gibt den Wachstumsfaktor an. Es gilt: $a = \frac{f(x+1)}{f(x)}$

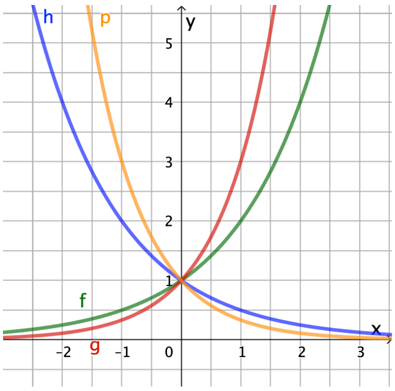
Bsp: $\left.\begin{array}{l} a = \frac{2}{1} = 2 \\ B(0) = 0{,}5 \end{array}\right\} B(x) = 0{,}5 \cdot 2^x$

Mit $a > 1$ werden Wachstumsprozesse beschrieben, mit $0 < a < 1$ werden Abnahmeprozesse beschrieben.



Exponentialfunktionen und ihre Eigenschaften

Funktionen der Form $f: x \mapsto \boldsymbol{a^x} \quad$ mit $\quad a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$ heißen **Exponentialfunktionen**



- Definitionsmenge: $\mathbb{R}$; Wertemenge: $\mathbb{R}^+$
- Die Graphen verlaufen über der x-Achse, die Funktionswerte sind positiv.
- Die Funktionen haben keine Nullstelle, die x-Achse ist waagrechte Asymptote des Graphen.
- Die Graphen verlaufen durch den Punkt P(0|1)
- Für $a > 1$ steigen die Graphen der Exponentialfunktionen, für $0 < a < 1$ fallen die Graphen streng monoton.
- Die Graphen von $y = a^x$ und $y = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ sind zueinander symmetrisch bezüglich der y-Achse (z.B. $p(x) = 0{,}5^x$ und $g(x) = 2^x$)

Der Graph der Funktion der Form $\boldsymbol{g: x \mapsto c \cdot a^x}$ ($c \in \mathbb{R}$) entsteht aus dem Graphen der Funktion $f: x \mapsto a^x$ durch Streckung in y-Richtung und – falls $c < 0$ – durch Spiegelung an der x-Achse.

Typische Aufgaben

1. Beschreiben Sie die Graphen der folgenden Funktionen. Skizzieren Sie die Graphen und nennen Sie Unterschiede und Zusammenhänge:

   $f: x \mapsto 2^x \qquad g: x \mapsto 1{,}5^x \qquad h: x \mapsto \left(\frac{2}{3}\right)^x \qquad i: x \mapsto 1{,}5^{-x}$

2. Bestimmen Sie den Funktionsterm der Exponentialfunktion $f(x) = c \cdot a^x$, deren Graph durch die Punkte A und B verläuft.

   a) A(0|2), B(3|128) b) A(2|–25,2), B(5|–680,4)

3. Erläutern Sie, wie die Graphen der Funktionen aus dem Graphen einer Exponentialfunktion $g(x) = a^x$ hervorgehen.

   $f(x) = 2 \cdot 4{,}5^x$ b) $f(x) = -\frac{1}{3} \cdot 6^x$ c) $f(x) = -3 \cdot 2^x + 2$

3. Beim Reaktorunglück von Tschernobyl wurde eine Menge von etwa 400g radioaktivem Jod 131 freigesetzt. Jod 131 hat die Halbwertszeit von 8,0 Tagen, d.h. in jeweils 8,0 Tagen halbiert sich die Menge des noch vorhanden radioaktiven Materials Jod 131.

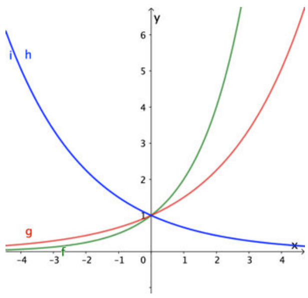
   a) Geben Sie den Term einer Funktion M an, die die Menge des radioaktiven Jod 131 als Funktion der Zeit t beschreibt.

   b) Berechnen Sie, welche Menge (in g) Jod131 nach einem Tag noch vorhanden ist.
   Berechnen Sie, wie viel Prozent der Anfangsmenge nach einem Monat noch vorhanden ist.

   c) Bestimmen Sie die Zeitspanne, in der 60% der Anfangsmenge zerfallen.

Lösungen

1. Hier kann man z.B. Aussagen über das Monotonie- (=Steigungs-) Verhalten, Schnittpunkte mit den Achsen etc treffen.



Die Graphen der Funktionen h und i sind identisch, da $1{,}5^{-x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x}$.

Sie sind monoton fallend, da $a = \frac{2}{3} < 1$.

Die Graphen der Funktionen f und g sind monoton steigend, der Graph von f steigt schneller als der von g, da $2 > 1{,}5$

2.

a) A(0/2), B(3/128)	b) A(2/-25,2), B(5/-680,4)
$y = c \cdot a^x$ A(0/2) einsetzen: $2 = c \cdot a^0 \Longrightarrow c = 2$ B(3/128) einsetzen: $128 = 2 \cdot a^3 \quad \vert :2$ $64 = a^3 \quad \vert \sqrt[3]{\cdot}$ $4 = a$ $\Longrightarrow f(x) = 2 \cdot 4^x$	$y = c \cdot a^x$ A(2/-25,2) einsetzen: $-25{,}2 = c \cdot a^2 \Longrightarrow c = \frac{25{,}2}{a^2}$ B(5/-680,4) einsetzen: $-680{,}4 = c \cdot a^5 \Longrightarrow c = \frac{-680{,}4}{a^5}$ Gleichsetzen: $\frac{25{,}2}{a^2} = \frac{-680{,}4}{a^5} \quad \vert \cdot a^5 \vert :(-25{,}2)$ $a^3 = 27 \quad \vert \sqrt[3]{\cdot}$ $a = 3$ $c = \frac{25{,}2}{3^2} = -2{,}8$ $\Longrightarrow f(x) = -2{,}8 \cdot 3^x$,

3. Der Graph von f geht aus dem Graphen von g hervor…
   a) …durch Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung.
   b) …durch Stauchung mit dem Faktor $\frac{1}{3}$ in y-Richtung und Spiegelung an der x-Achse.
   c) …durch Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung, Spiegelung an der x-Achse und Verschiebung um 2 in positive y-Richtung.

4. a) M(t) gibt die Menge des noch vorhandenen Jods in g an.

Mit dem Zerfallsgesetz: $M(t) = 400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}}$, wenn t in Tagen angegeben wird.

(Nutzen Sie, dass die Halbwertszeit 8 Tage bekannt ist)

Alternative Lösung: $M(t) = 400 \cdot a^t$ mit $M(8) = 200$: $200 = 400 \cdot a^8 \Rightarrow a = \sqrt[8]{0{,}5}$

$M(t) = 400 \cdot \left(\sqrt[8]{0{,}5}\right)^t = 400 \cdot 0{,}5^{\frac{1}{8}t}$

(Dieser Weg klappt immer, auch wenn die Halbwertszeit nicht bekannt ist.)

b) $M(1) = M_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{8}} \approx 400g \cdot 0{,}92 \approx 368g$ Es sind noch ca 368 g vorhanden.

$M(30) = M_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{30}{8}} \approx M_0 \cdot 0{,}074$ Es sind noch 7,4% der Anfangsmenge vorhanden.

c) Es sind noch 40% vorhanden:

$M(t) = M_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} = M_0 \cdot 0{,}4 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} = 0{,}4 \quad \Rightarrow \quad \frac{t}{8} = \log_{0{,}5}(0{,}4) \approx 1{,}32 \quad \Rightarrow \quad t \approx 10{,}6$ (Tage)