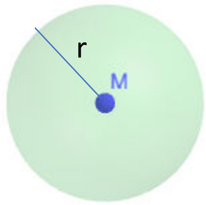
Mathematik am Peutinger-Gymnasium

Geo 14 — Grundwissen

Kugel, Pyramide und Kegel (Jgst. 10)

Kugel

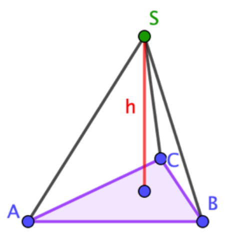


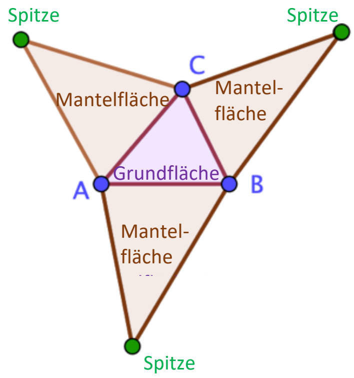
Kugel:

Volumen: $V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi r^3$

Oberflächeninhalt: $O_{Kugel} = 4\pi r^2$

Pyramide



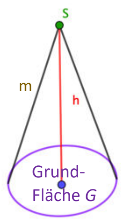


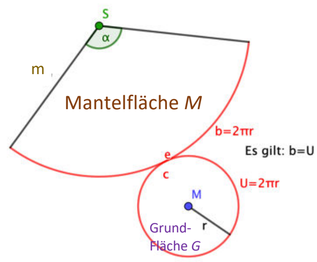
Pyramide:

Das Prisma besteht aus einer n-eckigen Grundfläche G. Verbindet man die Punkte auf den Rändern der Grundfläche mit einem Punkt oberhalb der Grundfläche so erhält man eine Pyramide. Ist diese Spitze S über dem Mittelpunkt eines symmetrischen Vielecks, handelt es sich um eine **gerade Pyramide**, anderenfalls, um eine **schiefe Pyramide**.
Das Netz einer Pyramide besteht aus der n-eckigen Grundfläche und dem Mantel M aus n Dreiecken.
h ist die Höhe der Pyramide.

Volumen: $V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$
Oberflächeninhalt: $O_{Pyramide} = G + M$

Kegel





Kegel:

Die Grundfläche ist ein Kreis mit Radius r. Verbindet man die Randpunkte zu einer Spitze oberhalb des Kreises, entsteht ein Kegel. Das Netz eines geraden Kegels besteht aus einem Kreis mit Radius r und einem Kreissektor mit Radius m (Mantellinie), der die Mantelfläche M darstellt. h ist die Höhe des Kegels.

Volumen: $V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$
Oberflächeninhalt: $O_{Kegel} = G + M = \mathrm{r}^2 \cdot \pi + \mathrm{r} \cdot \pi \cdot \mathrm{m}$

Aufgaben:

1. Ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten die Längen 6 cm und 8 cm haben, rotiert jeweils um eine der beiden Katheten und erzeugt dadurch einen Kegel. Bestimme jeweils den Inhalt der Oberfläche.
2. Eine geschälte kugelförmige Orange mit Durchmesser 7 cm besteht aus 8 gleichen Schnitzen.
   a) Bestimme Volumen jedes der acht Schnitze.
   b) Ermittle den Oberflächeninhalt „Haut“ um jeden Schnitz.

3. Das Tetraeder ist eine dreiseitige Pyramide, dessen Oberfläche aus vier gleichseitigen Dreiecken mit Kantenlänge a besteht. Namensgeber des „Tetra Paks“ waren die anfangs tetraederförmigen Verpackungen für Sahne, Milchgetränke und Saft.
   a) Bestimme das Volumen eines solchen „Tetra Paks“, dessen Kantenlänge 10 cm beträgt. Bestätige dazu, dass das Tetraeder mit Kantenlänge a die Körperhöhe $h_T = \frac{a}{3}\sqrt{6}$ hat.
   b) Ermittle die Kantenlänge für ein Tetraeder mit einem Fassungsvermögen von 500ml.
4. *Warum ist ein Wassertropfen kugelförmig und nicht in Form eines Zylinders oder eines Kegels ausgebildet?* Betrachte zur Beantwortung eine Kugel mit Radius r, einen volumengleichen Zylinder mit Radius r und einen volumengleichen Kegel mit Radius r.
   a) Weise nach, dass der Zylinder die Höhe $h = \frac{4}{3}\mathrm{r}$ haben muss und berechne die Höhe des Kegels.

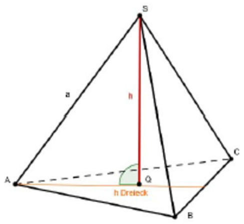
b) Verwende die gewonnenen Ergebnisse zur Berechnung der jeweiligen Oberflächeninhalte von Zylinder, Kegel und Kugel. Welche Vermutung für die Frage nach der Form des Wassertropfens liegt nahe?

Lösungen

1. *Es entstehen in beiden Fällen Kegel entweder mit Höhe 6 cm oder 8 cm; der Radius der Grundfläche ist dann entsprechend 8 cm oder 6 cm.*
Somit folgt: $O_1 = \pi \cdot (6^2 + 6 \cdot \sqrt{8^2+6^2})$ *bzw.* $O_2 = \pi \cdot (8^2 + 8 \cdot \sqrt{6^2+8^2})$ *d.h.*
$O_1 = 96\,\pi$ *und* $O_2 = 144\,\pi$.

2a) $V_O = \frac{4}{3}(3{,}5cm)^3\pi \approx 57{,}2cm^3$, *daraus folgt das Volumen eines Schnitzes* $V = V_O : 8 \approx 7{,}1cm^3$

2b) *Die Oberfläche eines Schnitzes besteht aus dem 8.Teil der Kugeloberfläche sowie den beiden Seitenflächen, die Halbkreise darstellen (siehe Bild oben). Die beiden Seitenflächen zusammen ergeben also einen ganzen Kreis (der entsteht, wenn man die Orange einmal in der Mitte durchschneidet).* $O_O = 4r^2\pi = 4(3{,}5cm)^2\pi \approx 153{,}9cm^2$, $A_K = r^2\pi = 38{,}5cm^2$
Daraus ergibt sich die Oberfläche eines der acht Schnitze
$O = O_O : 8 + A_K \approx 153{,}9cm^2 : 8 + 38{,}5cm^2 \approx 57{,}7cm^2$



3a) Für die Höhe des gleichseitigen Dreiecks (Grundfläche) gilt: $h_{Dreieck} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$
Die Körperhöhe des Tetraeders liegt im Dreieck AQS und kann mit dem Satz des Pythagoras ermittelt werden: aus $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 + h^2 = a^2$ wird

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3}{9}a^2} = \sqrt{\frac{6}{9}a^2} = \frac{a}{3}\sqrt{6}$$

Damit gilt für a = 10: $h_{Dreieck} = 5\sqrt{3}$ und hat $= \frac{10}{3}\sqrt{6}$. Daraus ergibt sich für das Volumen: $V = \frac{1}{3}\cdot G\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 5\sqrt{3}\right)\cdot\frac{10}{3}\sqrt{6} = 117{,}85$, also ca. 118 cm³

3b) Berechnet man das Volumen in Abhängigkeit von a, so erhält man $V = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)\cdot\frac{a}{3}\sqrt{6} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$.
Damit soll gelten: $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3 = 500\text{ cm}^3 \Leftrightarrow a^3 \approx 4242{,}64\text{ cm}^3 \Leftrightarrow a \approx 16{,}2\text{ cm}$

4a)

Berechnung der Zylinderhöhe:

$V_{Zylinder} = V_{Kugel}$

$r^2\cdot\pi\cdot h_{Zylinder} = \frac{4}{3}r^3\pi$

$h_{Zylinder} = \frac{4}{3}r^3\pi : (\pi\cdot r^2)$

$h_{Zylinder} = \frac{4}{3}r$

Der Kegel soll ebenfalls volumengleich sein.

$V_{Kegel} = V_{Kugel}$

$\frac{1}{3}r^2\pi\cdot h_{Kegel} = \frac{4}{3}r^3\pi$

$h_{Kegel} = \frac{4}{3}r^3\pi : \left(\frac{1}{3}r^2\pi\right)$

$h_{Kegel} = 4r$

4b) $O_{Zylinder} = 2G + M = 2r^2\pi + h_{Zylinder}\cdot 2r\pi = 2r^2\pi + \frac{4}{3}r\cdot 2r\pi = 2r^2\pi + \frac{8}{3}r^2\pi = 4\frac{2}{3}r^2\pi$

$O_{Kegel} = G + M = r^2\pi + r\pi m = r^2\pi + r\pi\cdot\sqrt{(4r)^2 + r^2} = r^2\pi + \sqrt{17}r^2\pi \approx 5{,}1r^2\pi$

$O_{Kugel} = 4r^2\pi$

Also gilt: $O_{Kugel} < O_{Zylinder} < O_{Kegel}$

Vermutung: ein Wassertropfen hat Kugelform, weil dieser Körper die kleinste Oberfläche hat.