



Laplace-Experiment und Wahrscheinlichkeit (Jgst. 8)

Versuchsausgänge eines Zufallsexperiments heißen **Ergebnisse**. Ergebnisse können zu **Ereignissen** zusammengefasst werden. Zufallsexperimente, bei denen jedes Ergebnis gleich wahrscheinlich ist, heißen **Laplace-Experimente**. Die **Wahrscheinlichkeit** $P(E)$ eines Ereignisses E lässt sich bei einem Laplace-Experiment mit folgender Formel berechnen:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der zu } E \text{ gehörigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

Bsp.: Würfeln

Ergebnisse sind 1, 2, 3, 4, 5, 6: **Ergebnisraum** $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$; jedes Ergebnis ist gleich wahrscheinlich, es handelt sich also um ein Laplace-Experiment.

Für das Ereignis „gerade“: $G = \{2;4;6\}$ gilt:

$$P(G) = \frac{3}{6} = 0,5$$

Sind die Ergebnisse eines Zufallsexperimentes nicht gleich wahrscheinlich, kann eine **Verfeinerung** zu gleich wahrscheinlichen Ergebnissen führen.

Bsp.: Augensumme beim Werfen zweier Würfel

Die Augensumme 4 (1+3; 2+2; 3+1) ist wahrscheinlicher als die Augensumme 2 (1+1). Die Verfeinerung (in Klammern) erfüllt die Laplace-Bedingung: jede der 36 Würfelkombinationen ist gleich wahrscheinlich.

$$P(\text{"Augensumme 4"}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}; \quad P(\text{"Augensumme 2"}) = \frac{1}{36}$$

Aufgaben:

1. Entscheide, bei welchen Zufallsexperimenten es sich um Laplace-Experimente handelt.

Gib auch jeweils den zu Grunde gelegten Ergebnisraum Ω an.

- a) Ziehen einer Karte aus einem Deck mit 20 Karten
- b) Schießen eines Elfmeters
- c) Note in einer Schulaufgabe
- d) Werfen eines Reißnagels
- e) Werfen einer Münze

2. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse.

- a) E : „Die Augenzahl beim Werfen eines Würfels ist kleiner als 5.“
- b) E : „Die Augensumme beim Werfen zweier Würfel ist kleiner als 5.“
- c) E : „Beim Werfen zweier Würfel sind beide Würfelresultate kleiner als 5.“
- d) E : „Eine aus einem Kartendeck mit 32 Karten gezogene Karte ist eine Herz-Karte.“
- e) E : „Eine aus einem Kartendeck mit 32 Karten gezogene Karte ist eine As.“

3. Ein Kunde darf zweimal mit einem idealen Würfel (sog. Laplace-Würfel) würfeln. Hat er zwei Sechser, erhält er 50 % Rabatt, bei nur einem Sechser erhält er 25 % Rabatt. Ermittle, wie viel % der Kunden einen Rabatt erhalten.

4. In einer Schüssel befinden sich 20 Billardkugeln mit den Zahlen 1 bis 20. Patricia zieht eine Kugel zufällig heraus.

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl auf der Kugel durch 4 oder durch 5 teilbar ist.

Lösungen:

1.

a) Laplace-Experiment mit $\Omega = \{K1, K2, K3, \dots, K20\}$

b) Kein Laplace-Experiment mit $\Omega = \{T, NT\}$

c) Kein Laplace-Experiment $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

d) Kein Laplace-Experiment $\Omega = \{\text{Kopf, Spitze, Seite}\}$

e) Laplace (bei einer idealen Münze) $\Omega = \{\text{Wappen, Zahl}\}$; bei einer gezinkten Münze: kein Laplace-Experiment

2.

$$a) \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} P(E) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \approx 66,6\%$$

$$b) \Omega = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, \dots, 31, 32, 33, 34, \dots, 41, 42, 43, 44, \dots, 51, \dots, 56, 61, \dots, 66\}$$

$$P(E) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \approx 16,6\%$$

$$c) \Omega = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, \dots, 31, 32, 33, 34, \dots, 41, 42, 43, 44, \dots, 51, \dots, 56, 61, \dots, 66\}$$

$$P(E) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9} \approx 44,4\%$$

$$d) \text{ Bei einem Kartendeck gibt es vier verschiedene Farben, also insgesamt bei einem Deck von 32 Karten gibt es acht Herz-Karten } P(E) = \frac{32}{8} = \frac{1}{4} \approx 25\%$$

$$e) \text{ Bei einem Kartendeck gibt es vier verschiedene Farben, von jeder Farbe ein As: } P(E) = \frac{32}{4} = \frac{8}{1} \approx 12,5\%$$

3.

Zwei Sechser gibt es nur beim Wurf 66. Genau einen Sechser gibt es bei: 16, 26, 36, 46, 56, 61, 62, 63, 64 und 65. D.h. insgesamt gibt es in 11 von 36 möglichen Ergebnissen mindestens einen Sechser und damit einen Rabatt für den Kunden: $\frac{11}{36} \approx 30,56\%$

4.

Kugelnnummer durch 4 teilbar: **4, 8, 12, 16, 20**, d.h. 5 Möglichkeiten
 Kugelnnummer durch 5 teilbar: **5, 10, 15, 20**, d.h. 3 weitere Möglichkeiten
 Patricia zieht mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{20}{8} = 40\%$ eine Kugel, deren Nummer durch 4 oder durch 5 teilbar ist.