Mathematik am Peutinger-Gymnasium

Wkt 5 Grundwissen

Vierfeldertafel – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten (Jgst. 9)

Mit sogenannten **Vierfeldertafeln** lassen sich Mächtigkeiten bzw. Wahrscheinlichkeiten von verknüpften Ereignissen und ihren Gegenereignissen immer systematisch darstellen und ausrechnen (**Überblick**!).

Beispiel:
Ein Test, bei dem 2000 Personen untersucht wurden, ergab: 400 Personen hatten das Merkmal A und 200 Personen das Merkmal B. 60 Personen hatten sowohl das Merkmal A als auch das Merkmal B.

	A	$\mathbf{\overline{A}}$	
B	**60**	140	**200**
$\mathbf{\overline{B}}$	340	1460	1800
	400	1600	**2000**

Die fehlenden Werte lassen sich leicht berechnen, da die Summe von je zwei inneren (blau-grauen) Feldern den entsprechenden Wert in der Randzeile bzw. Randspalte ergeben MUSS.

Mithilfe der Mächtigkeiten der verknüpften Ereignisse kannst du die Wahrscheinlichkeiten berechnen

	A	$\mathbf{\overline{A}}$	
B	$\frac{60}{2000}$	$\frac{140}{2000}$	$\frac{200}{2000}$
$\mathbf{\overline{B}}$	$\frac{340}{2000}$	$\frac{1460}{2000}$	$\frac{1800}{2000}$
	$\frac{400}{2000}$	$\frac{1600}{2000}$	$\frac{2000}{2000} = 1$

Allgemein: Vierfeldertafel mit **Mächtigkeiten**:

	A	$\mathbf{\overline{A}}$	
B	$\lvert A \cap B \rvert$	$\lvert \overline{A} \cap B \rvert$	$\lvert B \rvert$
$\mathbf{\overline{B}}$	$\lvert A \cap \overline{B} \rvert$	$\lvert \overline{A} \cap \overline{B} \rvert$	$\lvert \overline{B} \rvert$
	$\lvert A \rvert$	$\lvert \overline{A} \rvert$	$\lvert \Omega \rvert$

Vierfeldertafel mit **Wahrscheinlichkeiten**:

	A	$\mathbf{\overline{A}}$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
$\mathbf{\overline{B}}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
	$P(A)$	$P(\overline{A})$	$P(\Omega)$

Aufgaben:

1. Von 400 Mädchen gehen 150 in einen Schwimmverein, von diesen Schwimmerinnen spielen 40 auch noch Mandoline. 87,5% aller Mädchen haben mindestens eines dieser beiden Hobbys. Ermittle mithilfe einer Vierfeldertafel, wie viele Mädchen genau eines der beiden Hobbys haben.

2. Ein Imker hat insgesamt 40 Bienenvölker, wobei alle Völker reichlich Honig produziert haben. Bei 12 seiner Völker hat er bereits Honig geerntet. Von den Völkern, denen er bereits den Honig entnommen hat, ist aus 4 Völkern ein Schwarm ausgeflogen. Insgesamt sind aus 8 seiner Völker Schwärme ausgeflogen. Eines der Bienenvölker wird zufällig ausgewählt. Es werden die folgenden Ereignisse betrachtet:

A: „Einem Bienenvolk ist der Honig entnommen.“
B: „Einem Bienenvolk ist ein Schwarm entflogen.“

Erstelle eine vollständig beschriftete Vierfeldertafel für die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

3. Ermittle zu der gegebenen Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeiten $P(A \cap B)$, $P(\bar{A} \cap B), P(A)\ und\ P(A \cup B)$.

	A	$\bar{A}$	
B	2	13	15
$\bar{B}$	23	22	45
	25	35	60

4. Von 140 Erdmännchen haben 72 schwarze Ohren, 55 Erdmännchen sind Jungtiere. Bestimme das Intervall, in dem die Anzahl derjenigen Erdmännchen liegt, die schwarze Ohren haben, aber keine Jungtiere sind.

4. S…Erdmännchen hat schwarze Ohren
J…Erdmännchen ist noch ein Jungtier

	S	$\bar{S}$	
J			**55**
$\bar{J}$			85
	72	68	**140**

Es sind zu wenige Informationen in der Aufgabe gegeben, um die Vierfeldertafel vollständig auszufüllen („nur drei“). Daher schreibt man in eines der mittleren Felder eine Variable, z. B. x. Es ergibt sich:

	S	$\bar{S}$	
J	x	$55 - x$	**55**
$\bar{J}$	$72 - x$	$68 - (55 - x) = 13 + x$	85
	72	68	**140**

Da alle Zahlen in der Vierfeldertafel nicht negativ sein dürfen, gilt:

$$x \geq 0\ und\ 55 - x \geq 0\ und\ 72 - x \geq 0$$

Daraus folgt, dass $x \leq 55$, d.h. $x \in [0; 55]$
(sprich: „größtmöglich wäre $x = 55$ und kleinstmöglich wäre $x = 0$; oder irgendetwas dazwischen…“)
Gefragt ist nach der Anzahl der Erdmännchen, die schwarze Ohren haben, aber keine Jungtiere sind, d.h. $|S \cap \bar{J}|$

- für $x = 0$: $72 - 0 = 72$
- für $x = 55$: $72 - 55 = 17$

Lösungen:[1]

1. S… Schwimmerin
M… spielt Mandoline

$0{,}875 \cdot 400 = \mathbf{350}$
D.h. 350 der 400 Mädchen haben mindestens eines der beiden Hobbys. Daraus folgt, dass 50 Mädchen keines der beiden Hobbys verfolgen. Es ergibt sich also:

	S	**$\bar{\text{S}}$**		
M	**40**	200	240	
$\bar{\text{M}}$	110	**50**	160	
	150	250	**400**	

Genau eines der beiden Hobbys, d.h. gesucht ist die Anzahl der Mädchen, die entweder Schwimmen gehen, aber nicht Mandoline spielen plus die Anzahl der Mädchen, die nicht Schwimmen geht, aber Mandoline spielt.
Also 110 + 200 = 310 $\Longrightarrow$ Genau eines der Hobbys haben 310 Mädchen.

2.

	A	**$\bar{\text{A}}$**	
B	$\frac{4}{40}$	$\frac{4}{40}$	$\frac{8}{40}$
$\bar{\text{B}}$	$\frac{8}{40}$	$\frac{24}{40}$	$\frac{32}{40}$
	$\frac{12}{40}$	$\frac{28}{40}$	$\frac{40}{40} = 1$

3. $P(A \cap B) = \frac{2}{60} = \frac{1}{30} \approx 3{,}3\%$
$P(\bar{A} \cap B) = \frac{13}{60} \approx 21{,}7\%$
$P(A) = \frac{25}{60} = \frac{5}{12} \approx 41{,}7\%$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{25}{60} + \frac{15}{60} - \frac{2}{60} = \frac{38}{60} \approx 63{,}3\%$