



Rechnen in \mathbb{Z} : Besonderheiten bei Addition/Subtraktion, Multiplikation und Division (Jgst. 5)

Addition:

- Wenn beide Summanden das **gleiche** Vorzeichen haben:
Addiere die Beträge der beiden Zahlen und gib dem Ergebnis das Vorzeichen beider Summanden.

$$(+3) + (+8) = +11 \quad \text{Beide Summanden sind positiv, also ist auch das Ergebnis positiv.}$$

$$(-3) + (-8) = -11 \quad \text{Beide Summanden sind negativ, also ist auch das Ergebnis negativ.}$$

- Wenn die Summanden **unterschiedliche** Vorzeichen haben:
Berechne die Differenz der Beträge der beiden Summanden und gib dem Ergebnis das Vorzeichen des Summanden, der den größeren Betrag hat.

$$(+3) + (-8) = -5 \quad \text{Der Summand mit dem größeren Betrag ist hier negativ, also ist auch das Ergebnis negativ.}$$

$$(-3) + (+8) = +5 \quad \text{Der Summand mit dem größeren Betrag ist hier positiv, also ist auch das Ergebnis positiv.}$$

Subtraktion: Man kann eine negative Zahl subtrahieren, indem man ihre Gegenzahl* addiert.

*) Man erhält die Gegenzahl einer Zahl, indem man ihr Vorzeichen umkehrt.
(Beispiel: Die Gegenzahl von -4 ist $+4$.)

$$(+3) - (+8) = (+3) + (-8) = -5 \quad \text{Man subtrahiert } (+8), \text{ indem man } (-8) \text{ addiert (siehe „Addition“).}$$

$$(+3) - (-8) = (+3) + (+8) = +11 \quad \text{Man subtrahiert } (-8), \text{ indem man } (+8) \text{ addiert (siehe „Addition“).}$$

Rechen- und Vorzeichen zusammenfassen:

$$\text{Aus } +(+5) \text{ wird } +5 : \quad 3 + (+5) = 3 + 5 = +8$$

$$\text{Aus } -(-5) \text{ wird } +5 : \quad 3 - (-5) = 3 + 5 = +8$$

$$\text{Aus } +(-5) \text{ wird } -5 : \quad 3 + (-5) = 3 - 5 = -2$$

$$\text{Aus } -(+5) \text{ wird } -5 : \quad 3 - (+5) = 3 - 5 = -2$$

Multiplikation und Division:

- Wenn beide Zahlen das **gleiche** Vorzeichen haben:
Multipliziere bzw. dividiere die Beträge und gib dem Ergebnis ein **positives** Vorzeichen.

$$(+5) \cdot (+4) = +20 \quad \text{Beide Faktoren sind positiv, also ist auch das Ergebnis positiv.}$$

$$(-15) : (-5) = +3 \quad \text{Sowohl Dividend als auch Divisor sind negativ, also ist auch das Ergebnis positiv.}$$

- Wenn die Zahlen **unterschiedliche** Vorzeichen haben:
Multipliziere bzw. dividiere die Beträge und gib dem Ergebnis ein **negatives** Vorzeichen.

$$(+5) \cdot (-4) = -20 \quad \text{Die beiden Faktoren haben unterschiedliche Vorzeichen, also ist das Ergebnis negativ.}$$

$$(-15) : (+5) = -3 \quad \text{Dividend und Divisor haben unterschiedliche Vorzeichen, also ist das Ergebnis negativ.}$$

Potenzen:

- Wenn die Basis der Potenz eine **positive** Zahl ist, dann ist auch der Wert der Potenz **positiv**.

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$(+5)^4 = (+5) \cdot (+5) \cdot (+5) \cdot (+5) = (+25) \cdot (+25) = 625$$

- Wenn die Basis der Potenz eine **negative** Zahl ist, dann ist auch der Wert der Potenz ...
 - ... **positiv**, falls der Exponent eine **gerade** Zahl ist.
 - ... **negativ**, falls der Exponent eine **ungerade** Zahl ist.

$$\begin{aligned} (-2)^3 &= (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = && \text{Basis negativ, Exponent ungerade} \\ &= (+4) \cdot (-2) = (-8) && \Rightarrow \text{Potenzwert negativ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-2)^4 &= (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = && \text{Basis negativ, Exponent gerade} \\ &= (+4) \cdot (+4) = (+16) && \Rightarrow \text{Potenzwert positiv} \end{aligned}$$

Aufgaben

Aufgabe 1: Berechne.

- $(-12) - (-354)$
- $(-102) + (-354)$
- $(-512) + (-1041)$
- $(-983) - (+124)$
- $(-612) - (-341)$
- $(-221) + (+514)$
- $(-421) - (+5027)$
- $(-83) + (+814)$

Aufgabe 2: Berechne.

- $(-12) \cdot (-214)$
- $(-21) \cdot (+592)$
- $(+991) \cdot (-42)$
- $(+124) \cdot (+510)$
- $(-270) : (+15)$
- $(+984) : (+12)$
- $(-1215) : (-9)$
- $(+902) : (-11)$

Aufgabe 3: Berechne.

- $(-7)^3$
- $(-4)^4$
- $(-2)^5 - (-12)^2$
- $[(-2) + (-5)]^4 - 1$

Aufgabe 4: Entscheide, ob die gegebene Aussage wahr oder falsch ist, und begründe deine Entscheidung.

- Die Summe zweier negativer Zahlen ist immer negativ.
- Das Produkt zweier negativer Zahlen ist immer negativ.
- Die Differenz zweier positiver Zahlen ist immer positiv.
- Die Differenz zweier negativer Zahlen ist immer negativ.

Lösungen

Aufgabe 1:

- a) $(-12) - (-354) = (-12) + (+354) = +342$
b) $(-102) + (-354) = -456$
c) $(-512) + (-1041) = -1553$
d) $(-983) - (+124) = (-983) + (-124) = -1107$
e) $(-612) - (-341) = (-612) + (+341) = -271$
f) $(-221) + (+514) = +293$
g) $(-421) - (+5027) = (-421) + (-5027) = -5448$
h) $(-83) + (+814) = +731$

Aufgabe 2:

Aufgabe 3:

- a) $(-12) \cdot (-214) =$
 $+2568$
b) $(-21) \cdot (+592) =$
 -12432
c) $(+991) \cdot (-42) =$
 -41622
d) $(+124) \cdot (+510) =$
 $+63240$
e) $(-270) \cdot (+15) = -18$
f) $(+984) \cdot (+12) = +82$
g) $(-1215) \cdot (-9) =$
 $+135$
h) $(+902) \cdot (-11) = -82$
- a) $(-7)^3 = (+49) \cdot (-7) = -343$
b) $(-4)^4 = (+16) \cdot (+16) = 256$
c) $(-2)^5 - (-12)^2 = -32 - 144 =$
 -176
d) $[(-2) + (-5)]^4 - 1 = [-7]^4 - 1 =$
 $2401 - 1 = 2400$

Aufgabe 4:

- a) Wahr, denn wenn beide Summanden ein negatives Vorzeichen haben, dann hat auch das Ergebnis immer ein negatives Vorzeichen.
b) Falsch, denn wenn beide Faktoren ein negatives Vorzeichen haben, dann hat das Ergebnis immer ein positives Vorzeichen.
c) Falsch, denn es gibt Differenzen positiver Zahlen, die einen negativen Wert haben: $(+3) - (+8) = (+3) + (-8) = -5$ (Gegenbeispiel).
d) Falsch, denn es gibt Differenzen negativer Zahlen, die einen positiven Wert haben: $(-3) - (-8) = (-3) + (+8) = +5$ (Gegenbeispiel).