Mathematik am Peutinger-Gymnasium

Zahl 12

Grundwissen

Lineare Gleichungssysteme (Jgst. 8)

Definition:
Ein Lineares Gleichungssystem (LGS) besteht aus mehreren (linearen) Gleichungen. Eine Lösung eines LGS erfüllt alle Gleichungen des LGS gleichzeitig.

Teil 1: ***Lösungsverfahren***
Hier konzentrieren wir uns als Standardlösungsverfahren auf das Einsetzverfahren, mit dem man jedes LGS lösen kann. Weitere mögliche Lösungsverfahren sind das Additionsverfahren und das Gleichsetzverfahren.

(I) $5x + y = 4$
(II) $-5x + 5y = -25$

(I‘)	$y = 4 - 5x$	*1.*	Löse eine Gleichung deiner Wahl nach einer Variable deiner Wahl auf. Hier: Gleichung (I) nach y
y in (II):	$-5x + 5 \cdot (4 - 5x) = -25$	*2.*	Setze das Ergebnis für die Variable, nach der aufgelöst wurde, in die andere Gleichung ein! Hier: $y = 4 - 5x$ in Gleichung (II)
	$-5x + 20 - 25x = -25$ $-30x + 20 = -25$ $-30x = -45$ $x = -45 : (-30) = 1{,}5$	*3.*	In dieser neuen Gleichung kommt nur noch eine Variable vor. Löse die Gleichung nach dieser Variable auf! Hier: nach x Ergebnis: $x = 1{,}5$ ist die Lösung für die Variable x.
x in y (I‘):	$y = 4 - 5 \cdot 1{,}5 = -3{,}5$	*4.*	Setze die Lösung für die Variable x für y in Gleichung (I‘) ein. Ergebnis: $y = -3{,}5$ ist die Lösung für die Variable y.

Insgesamt: $x = 1{,}5$ *und* $y = -3{,}5$ *ist die Lösung des LGS.*
Hinweis: *Eine Lösung für ein LGS umfasst immer Werte für alle darin vorkommenden Variablen (hier: x und y).*

Teil 2: ***Anzahl von Lösungen bei LGS***
Wie bei Gleichungen gibt es auch bei LGS 3 mögliche Arten von Lösungsmengen:

(1.) Genau eine Lösung Beispiel: siehe oben

(2.) Unendlich viele Lösungen (alle Lösungen liegen auf einer Lösungsgerade)
Gibt es dann, wenn die beiden Gleichungen die gleiche Aussage über x und y treffen.

(II) $5x + y = 4$
(III) $15x + 3y = 12$

Wer genau hinsieht, merkt, dass die zweite Gleichung das Dreifache der ersten Gleichung ist: $(I) \cdot 3 = (II)$
Wir gehen ganz normal nach dem Einsetzverfahren vor:

(I‘)	$y = 4 - 5x$	*1.*	Löse eine Gleichung deiner Wahl nach einer Variable auf. Hier: Gleichung (I) nach y
y in (II):	$15x + 3 \cdot (4 - 5x) = 12$	*2.*	Setze das Ergebnis für die Variable, nach der aufgelöst wurde, in die andere Gleichung ein. Hier: $y = 4 - 5x$ in Gleichung (II)
	$15x + 12 - 15x = 12$ $12 = 12$ (w.)	*3.*	In dieser neuen Gleichung kommt nur noch eine Variable vor. Löse die Gleichung nach dieser Variable auf! Vereinfacht man, sieht man, dass die Variable „rausfällt“ und eine wahre Aussage entsteht.

Insgesamt: *Findet man einen Wert, der die 1. Gleichung löst, so löst dieser automatisch auch die 2. Gleichung. Es gibt dann unendlich viele Lösungen. Alle Lösungen liegen auf der Lösungsgerade* $y = f(x) = 4 - 5x$.

(3.) Keine Lösung

(II) $5x + y = 4$ (III) $15x + 3y = 2$			Wer genau hinsieht, merkt, dass die linke Seite der zweiten Gleichung das Dreifache der ersten Gleichung ist, aber die rechte Seite nicht. Wir gehen ganz normal nach dem Einsetzverfahren vor:
(I‘)	$y = 4 - 5x$	*1.*	Löse eine Gleichung deiner Wahl nach einer Variable auf. Hier: Gleichung (I) nach y
y in (II):	$15x + 3 \cdot (4 - 5x) = 2$	*2.*	Setze das Ergebnis für die Variable, nach der aufgelöst wurde, in die andere Gleichung ein. Hier: $y = 4 - 5x$ in Gleichung (II)
	$15x + 12 - 15x = 2$ $12 = 2$ (f.)	*3.*	In dieser neuen Gleichung kommt nur noch eine Variable vor. Vereinfacht man diese Gleichung, so „fällt“ die Variable raus und eine falsche Aussage entsteht.

Insgesamt: *Setzt man einen Wert ein, der die erste Gleichung löst, so ist die zweite Gleichung automatisch falsch. Es gibt keine Lösung.*

Teil 3: Aufstellen eines linearen Gleichungssystems

Hier gehst du vor wie beim Aufstellen einer Gleichung, nur dass du jetzt nicht nur eine Gleichung aufstellen musst, sondern zwei (oder mehrere).

Beispiel: Die Eltern von Alfred und Berta geben ihren Kindern insgesamt 40 € Taschengeld pro Monat. Weil Alfred viel älter ist als Berta, bekommt er doppelt so viel Taschengeld wie Berta.

Schritt 1: **Variablen definieren:**
a = monatliches Taschengeld von Alfred in €
b = monatliches Taschengeld von Berta in €

Schritt 2: **Gleichungen für das Gleichungssystem aufstellen:**
(I.) $a + b = 40$
(II.) $a = 2b$

Übungsaufgaben

1. Bestimme die Lösungsmenge!

Die Definitionsmenge für alle Variablen ist $\mathbb{Q}$.

a)
$(I)\quad \frac{1}{2} \cdot x - 2y = -\frac{11}{2}$
$(II)\quad 2x + 4y = -4$

b)
$(I)\quad 12s + 3p = -6$
$(II)\quad 4s - p = -4$

c)
$(I)\quad 16k - 3{,}2r = 64$
$(II)\quad 4k - 0{,}8r = 16$

2. Zahlenrätsel: Stelle jeweils ein lineares Gleichungssystem auf. Löse dann das Gleichungssystem.

b) Von zwei rationalen Zahlen ist die erste um 4,5 größer als die zweite. Die Summe aus dem sechsfachen Wert der ersten und dem doppelten Wert der zweiten ergibt drei. Ermittle den Zahlenwert der beiden Zahlen mit Hilfe eines Gleichungssystems!

c) Vor drei Jahren war Maxis Vater viermal so alt wie Maxi. In drei Jahren wird er nur noch dreimal so alt sein wie Maxi. Wie alt sind Maxi und sein Vater jetzt?

Hinweis: Definiere bei Teilaufgabe b) auch, wofür deine Variablen stehen!

3. Anwendung: Handyvertrag

Susanne will ihren Handyvertrag wechseln. Sie muss sich zwischen zwei Verträgen entscheiden. Der Vertrag „Schüler-XL“ besteht aus einem monatlichen Grundpreis von 10,50 € und einem Preis von 5 Ct pro Gesprächsminute. Der Vertrag „Schüler & friends“ hat einen Grundpreis von 7 €. Hier kostet die Gesprächsminute allerdings 0,10 €. Susanne will wissen, wann der „Schüler & friends“-Vertrag die günstigere Variante ist.

- Stelle dazu zuerst für jeden Handyvertrag einen Funktionsterm auf, der die monatlichen Kosten in Abhängigkeit der Anzahl der Gesprächsminuten angibt.
- Löse dann die Aufgabe.
  (Hinweis: Man kann die beiden Funktionsterme als Gleichungen eines LGS ansehen.)

Lösungen

1) a) (I) $\frac{1}{2}x - 2y = -\frac{11}{2}$ $|+2y$ $\Rightarrow \frac{1}{2}x = -\frac{11}{2} + 2y \;|:\frac{1}{2} \Rightarrow \boldsymbol{x = -11 + 4y}$

$\underline{\text{(II) } 2x + 4y = -4}$

x in (II): $2 \cdot (-11 + 4y) + 4y = -4$

$\Leftrightarrow \quad -22 + 8y + 4y = -4 \quad | +22$

$\Leftrightarrow \quad 12y = 18 \quad |:12$

$\Leftrightarrow \quad \underline{y = 1{,}5}$

y in (I'): $x = -11 + 4 \cdot 1{,}5 = -11 + 6 = -5$

b) (I) $12s + 3p = -6$

(II) $\underline{4s - p = -4}\; | -4s \qquad \Rightarrow -p = -4 - 4s \;|:(-1) \Rightarrow \mathbf{p = 4 + 4s}$

p in (I): $12s + 3 \cdot (4 + 4s) = -6$

$\Leftrightarrow \quad 12s + 12 + 12s = -6$

$\Leftrightarrow \quad 24s + 12 = -6 \;| -12$

$\Leftrightarrow \quad 24s = -18 \;|:24$

$\Leftrightarrow \quad s = -\frac{18}{24} = -0{,}75$

s in (I'): $p = 4 + 4 \cdot (-0{,}75) = 4 - 3 = 1$

c) (I) $16k - 3{,}2r = 64$

(II) $\underline{4k - 0{,}8r = 16}\; | +0{,}8r \qquad \Rightarrow 4k = 16 + 0{,}8r \;|:4 \Rightarrow \mathbf{k = 4 + 0{,}2r}$

k in (I): $16 \cdot (4 + 0{,}2r) - 3{,}2r = 64$

$\Leftrightarrow \quad 64 + 3{,}2r - 3{,}2r = 64$

$\Leftrightarrow \quad 64 = 64 \quad (wahr)$

$\Rightarrow$ unendlich viele Lösungen, die alle auf der Lösungsgeraden k = 4 + 0,2r liegen.

2) a) erste Zahl: x zweite Zahl: y

(I) $x = y + 4{,}5$

(II) $\underline{6x + 2y = 3}$

x in (II): $6 \cdot (y + 4{,}5) + 2y = 3$

$\Leftrightarrow \quad 6y + 27 + 2y = 3$

$\Leftrightarrow \quad 8y + 27 = 3 \;| -27$

$\Leftrightarrow \quad 8y = -24 \;| :8$

$\Leftrightarrow \quad \underline{y = -3}$

y in (I): $x = -3 + 4{,}5 = 1{,}5$

Die erste Zahl heißt 1,5, die zweite −3.

b) v: Alter des Vaters in Jahren

m: Alter von Maxi in Jahren

(I) $v - 3 = 4 \cdot (m - 3) \Leftrightarrow v - 3 = 4m - 12 \;| +3 \Leftrightarrow v = 4m - 9$

$\underline{\text{(II) } v + 3 = 3 \cdot (m + 3) \Leftrightarrow v + 3 = 3m + 9}$

v in (II'): $4m - 9 + 3 = 3m + 9 \;| +6$

$\Leftrightarrow \quad 4m = 3m + 15 \;| -3m$

$\Leftrightarrow \quad \underline{m = 15}$

m in (I'): $v = 4 \cdot 15 - 9 = 51$

Max ist 15 Jahre und sein Vater 51 Jahre alt.

3) x: Anzahl der monatlichen Gesprächsminuten

y: monatliche Kosten in €

„Schüler XL“: $f(x) = 0{,}05x + 10{,}5$

„Schüler & friends“: $g(x) = 0{,}1x + 7$

LGS: (I) $y = 0{,}05x + 10{,}5$

(II) $\underline{y = 0{,}1x + 7}$

(I) in (II): $0{,}05x + 10{,}5 = 0{,}1x + 7 \;| -0{,}05x$

$\Leftrightarrow \quad 10{,}5 = 0{,}05x + 7 \;| -7$

$\Leftrightarrow \quad 3{,}5 = 0{,}05x \;|:0{,}05$

$\Leftrightarrow \quad x = 70$

Bis 70 Gesprächsminuten pro Monat ist Schüler & friends günstiger.