Mathematik am Peutinger-Gymnasium

Zahl 13 **Grundwissen**

Rechnen mit Bruchtermen (Jgst. 8)

Bruchterme

Bruchterme sind Terme mit Variablen im Nenner. Die **Definitionsmenge** eines Bruchterms besteht aus allen Zahlen, für die der Nenner beim Einsetzen nicht 0 wird. Einen Bruchterm kann man kürzen, indem man Zähler und Nenner (ggf. vorher faktorisieren!) durch dieselbe Zahl oder denselben Term teilt.

Beispiel: $\frac{6}{2x+2}$ Definitionsmenge bestimmen: $2x+2=0 \Leftrightarrow x=-1 \Longrightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Kürzen: $\frac{6}{2x+2}=\frac{6}{2(x+1)}=\frac{3}{x+1}$

faktorisieren

Addition und Subtraktion von Bruchtermen

Gleichnamige Bruchterme werden addiert bzw. subtrahiert, indem man die Zähler addiert bzw. subtrahiert und den gemeinsamen Nenner beibehält: $\frac{3}{x+1}+\frac{x}{x+1}=\frac{3+x}{x+1}$ $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Ungleichnamige Bruchterme werden zunächst durch Erweitern oder Kürzen auf den Hauptnenner gebracht und damit gleichnamig gemacht: $\frac{5}{x+1}+\frac{11}{3(x+1)}=\frac{3\cdot 5}{3\cdot(x+1)}+\frac{11}{3(x+1)}=\frac{26}{3(x+1)}$ $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Multiplikation und Division von Bruchtermen

Bruchterme werden multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert:

$\frac{4}{x+1}\cdot\frac{c}{x}=\frac{4\cdot c}{(x+1)\cdot x}$ $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$

Durch einen Bruchterm wird dividiert, indem man mit dem Kehrbruch dieses Bruchterms multipliziert:

$\frac{3}{x+1}:\frac{5}{x}=\frac{3}{(x+1)}\cdot\frac{x}{5}=\frac{3\cdot x}{5(x+1)}$ $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$

Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Bestimme die Definitionsmenge des Bruchterms.

a) $\frac{2}{x-5}$ b) $\frac{7x}{x(x+1)}$ c) $\frac{2x+9}{7x+3}$

Aufgabe 2: Erweitere auf den angegebenen Nenner.

Beispiel: $\frac{4x+1}{x-3}$ $[2x^2-6x]$ $\frac{4x+1}{x-3}=\frac{(4x+1)\cdot 2x}{(x-3)\cdot 2x}=\frac{8x^2+2x}{2x^2-6x}$

a) $\frac{3}{3-x}$ $[9x-3x^2]$ b) $\frac{4x}{3x-1}$ $[2x-6x^2]$

Aufgabe 3: Kürze so weit wie möglich.

Beispiel: $\frac{3x^2y-6xy}{9xy^2+18x^2y} = \frac{3xy\cdot(x-2)}{9xy\cdot(y+2x)} = \frac{x-2}{3\cdot(y+2x)}$

faktorisieren

a) $\frac{24ab-6b}{12b^2}$ **b)** $\frac{10cd^3-5c^2d^2}{25c^2d^2-50cd^3}$ **c)** $\frac{6xy-24y}{12x^2-16x}$

Aufgabe 4: Fasse zusammen und vereinfache.

Beispiel: $\frac{3}{x+1} + \frac{5+x}{3x} = \frac{3\cdot3x}{(x+1)\cdot3x} + \frac{(5+x)\cdot(x+1)}{3x\cdot(x+1)} = \frac{3\cdot3x+(5+x)\cdot(x+1)}{3x\cdot(x+1)} = \frac{9x+5x+5+x^2+x}{3x\cdot(x+1)} = \frac{x^2+15x+1}{3x\cdot(x+1)}$

a) $\frac{3-x}{x+2} + \frac{5+x}{x} =$ **b)** $\frac{3x}{x-2} - \frac{1}{x+2} =$ **c)** $\frac{3+2x}{4x} + 2 =$

Beispiel: $\frac{x^2-x}{4y+2xy} \cdot \frac{2+x}{x^2} = \frac{(x^2-x)\cdot(2+x)}{(4y+2xy)\cdot x^2} = \frac{x(x-1)\cdot(2+x)}{2y(2+x)\cdot x\cdot x} = \frac{x-1}{2y\cdot x} = \frac{x-1}{2xy}$

d) $\frac{y+1}{7y} \cdot \frac{14y^2}{2xy+2x} =$ **e)** $\frac{6a}{a^2+2a} : \frac{3ab+6a^2}{ab+2b}$

Lösungen

Aufgabe 1: Bestimme die Definitionsmenge des Bruchterms.

a) $\frac{2}{x-5}$; $D = \mathbb{R}\backslash\{5\}$ b) $\frac{7x}{x(x+1)}$; $D = \mathbb{R}\backslash\{-1;0\}$ c) $\frac{2x+9}{7x+3}$; $D = \mathbb{R}\backslash\{-\frac{3}{7}\}$

Aufgabe 2: Erweitere auf den angegebenen Nenner.

a) $9x - 3x^2 = 3x(3-x)$ somit: $\frac{3}{3-x} = \frac{3\cdot\mathbf{3x}}{3x(3-x)} = \frac{9x}{9x-3x^2}$

b) $2x - 6x^2 = 2x(1-3x)$ daher: $\frac{4x}{3x-1} = \frac{4x\cdot(\mathbf{-2x})}{-2x(3x-1)} = -\frac{8x^2}{2x-6x^2}$

Aufgabe 3: Kürze so weit wie möglich.

a) $\frac{24ab-6b}{12b^2} = \frac{6b(4a-1)}{2\cdot6b^2} = \frac{4a-1}{2b}$ Hier geht nichts mehr! Nicht 4 und 2 kürzen!

b) $\frac{10cd^3-5c^2d^2}{25c^2d^2-50cd^3} = \frac{5cd^2(2d-c)}{25cd^2(c-2d)} = \frac{5cd^2(2d-c)}{25cd^2\cdot(\mathbf{-1})(2d-c)} = -\frac{1}{5}$ Tipp: c – 2d = (–1)·(2d – c)

c) $\frac{6xy-24y}{12x^2-16x} = \frac{6y(x-4)}{4x(3x-4)} = \frac{3y(x-4)}{2x(3x-4)}$ Hier geht nicht mehr!!

Aufgabe 4: Fasse zusammen und vereinfache.

a) $\frac{3-x}{x+2} + \frac{5+x}{x} = \frac{\mathbf{x}(3-x)}{\mathbf{x}(x+2)} + \frac{(5+x)(\mathbf{x+2})}{x(\mathbf{x+2})} = \frac{(3x-x^2)+(x^2+7x+10)}{x(x+2)} = \frac{10x+10}{x(x+2)}$

b) $\frac{3x}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{3x(x+2)-1\cdot(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{3x^2+6x-x+2}{(x-2)(x+2)} = \frac{3x^2+5x+2}{(x-2)(x+2)}$ Achtung auf die Minusklammer!

c) $\frac{3+2x}{4x} + 2 = \frac{3+2x}{4x} + \frac{2\cdot4x}{4x} = \frac{3+2x+8x}{4x} = \frac{3+10x}{4x}$

d) $\frac{y+1}{7y} \cdot \frac{14y^2}{2xy+2x} = \frac{y+1}{7y} \cdot \frac{2\cdot7\cdot y\cdot y}{2x(y+1)} = \frac{(y+1)\cdot2\cdot7\cdot y\cdot y}{7y\cdot2\cdot x(y+1)} = \frac{y}{x}$

e) $\frac{6a}{a^2+2a} : \frac{3ab+6a^2}{ab+2b} = \frac{6a}{a^2+2a} \cdot \frac{ab+2b}{3ab+6a^2} = \frac{6a\cdot b\cdot(a+2)}{a\cdot(a+2)\cdot3\cdot a\cdot(b+2a)} = \frac{2b}{b+2a}$