Lösen quadratischer Gleichungen (Jgst. 9)

Eine Gleichung der Form $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$) heißt **quadratische Gleichung**.

Quadratische Gleichungen können mithilfe der Lösungsformel „Mitternachtsformel“ gelöst werden:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Je nachdem, welche Werte für a, b, oder c gegeben sind, kann eine quadratische Gleichung keine, eine oder zwei Lösungen haben.
Dazu betrachtet man die **Diskriminante**

$$D = b^2 - 4ac.$$

Für $D < 0$ gibt es **keine** Lösung der Gleichung,
für $D = 0$ gibt es **eine** Lösung der Gleichung,
für $D > 0$ gibt es **zwei** Lösungen der Gleichung.

Folgende Formen der quadratischen Gleichungen können auch ohne Lösungsformel schnell gelöst werden:

Form	Beispiel	Bemerkung
$\boldsymbol{ax^2+c=0}$	$3x^2-27=0$ $x^2=9$ $x_1=-3; x_2=3$	reinquadratische Form (**b = 0)** Lösungen gibt es nur für den Fall $-\frac{c}{a} \geq 0$
$\boldsymbol{ax^2+bx=0}$	$5x^2-4x=0$ $5x(x-4)=0$ $x_1=0; x_2=4$	„Ausklammern“ (**c = 0**)
$\boldsymbol{a(x-x_1)(x-x_2)=0}$	$4(x-3)(x+4)=0$ Nullstellen ablesen: $x_1=3; x_2=-4$	„Produktform“ Manchmal hilft die binom. Formel: $4x^2+8x-4=4(x^2-2x+1)$ $=4(x-1)^2$
$\boldsymbol{a(x-d)^2+e=0}$	$4(x-2)^2-1=0$ $4(x-2)^2=1 \quad \vert :4$ $(x-2)^2=0{,}25 \quad \vert\sqrt{}$ $x-2=-0{,}5$ oder $x-2=+0{,}5$ $x_1=1{,}5; x_2=2{,}5$	„Scheitelpunktform“

Das Lösen quadratischer Gleichungen findet oft Anwendung bei der Untersuchung quadratischer Funktionen, z.B. bei der Suche nach den Nullstellen. Auch die x-Koordinate des Parabelscheitels kann in der Lösungsformel abgelesen werden:

$$x_{1,2} = \frac{\boldsymbol{-b}\pm\sqrt{b^2-4ac}}{\boldsymbol{2a}}$$
$$\Rightarrow x_S = -\frac{b}{2a}$$

Aufgaben

1. Lösen Sie die quadratischen Gleichungen, verwenden Sie verschiedene Verfahren.
   a) $1{,}5x^2-6x+4{,}5=0$ b) $-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-1)=0$ c) $-3x^2+4{,}5=0$
   c) $2x^2-6x=0$ d) $x^2-6x=-9$ e) $3x^2+4x=2{,}5x+9$

2. Begründen Sie, wie viele Lösungen die folgenden Gleichungen haben:
   a) $x^2-2x+2=0$ b) $-5x^2-26x=-5$ c) $x(x-4)=-6-(2x-5)$

3. Untersuchen Sie, für welche Werte von t die Gleichung $x^2 + 6x + t = 0$ keine, eine oder zwei Lösungen hat.

4. Bestimmen Sie die Nullstellen und den Scheitel der Parabel f bzw. mit …
   a) $f(x) = -2x^2 + 3x + 5$ b) $f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 2$ c) $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x-3)$

5. Bestimmen Sie die Schnittpunkte der zugehörigen Graphen der Funktionen $g$und h :
   $g(x) = 2x + 2$ und $p(x) = -2x^2 + 3x + 5$

Lösungen:

1. a) Nutzung der Lösungsformel mit $a = 1{,}5, b = -6 , c = 4{,}5$ $x_{1,2} = \frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 1{,}5\cdot 4{,}5}}{2\cdot 1{,}5}$ $\Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = 3$	b) Ablesen der Lösungen: $x_1 = -\frac{1}{3};\ x_2 = 1$	c) reinquadr. Gleichung: $-3x^2 + 4{,}5 = 0$ $-3x^2 = -4{,}5$ $x^2 = 1{,}5$ $\Rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{6}}{2};\ x_2 = \frac{\sqrt{6}}{2}$
d) Ausklammern $2x(x-3) = 0$ $\Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 3$	e) Umstellen, Lösungsformel $x^2 - 6x + 9 = 0$ $\Rightarrow x_1 = x_2 = 3$ oder bin. Formel nutzen: $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$	f) Umstellen, Lösungsformel: $3x^2 + 1{,}5x - 9 = 0$ $x_1 = 1{,}5;\ x_2 = -2$

2. a) $D = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 2$ $D = -4 < 0$ $\Rightarrow es\ gibt\ keine\ Lösungen$	b) Umstellen: $-5x^2 - 26x + 5 = 0$ $D = (-26)^2 - 4\cdot(-5)\cdot 5 > 0$ $\Rightarrow es\ gibt\ zwei\ Lösungen$	c) Umstellen: $x^2 - 2x + 1 = 0$ $D = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = 0$ $es\ gibt\ eine\ Lösung$

3. $D = 6^2 - 4\cdot 1\cdot t = 36 - 4t$
   $D = 0, wenn\ t = 9$ für $t = 9$ gibt es genau eine Lösung
   $D > 0, wenn\ t < 9$ für $t < 9$ gibt es genau zwei Lösungen
   $D < 0, wenn\ t > 9$ für $t > 9$ gibt es keine Lösung

4 a) mit der Lösungsformel $\Rightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 2{,}5$ Scheitel der Parabel: $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2(-2)} = \frac{3}{4}$ $y_S = f(x_s) = f\left(\frac{3}{4}\right) = 6{,}125$ $S\left(\frac{3}{4}\middle\|6{,}125\right)$	b) Umstellen: Scheitel der Parabel: $S(4\|2)$ Lösen durch Umstellen: $\frac{1}{2}(x-4)^2 - 2 = 0$ $\frac{1}{2}(x-4)^2 = 2$ $(x-4)^2 = 4$ $x - 4 = -2$ oder $x - 4 = +2$ $\Rightarrow x_1 = 2;\ x_2 = 6$ oder: Ausmultiplizieren und Lösungsformel verwenden.	c) Nullstellen ablesen: $\Rightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 3$ Scheitel der Parabel: $x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1+3}{2}$ $\Rightarrow x_S = 1$ $y_S = f(x_s) = f(1) = -2$ $S(1\|-2)$

5. Schnittpunkte bestimmen:
Gleichsetzen der Terme: $2x + 2 = -2x^2 + 3x + 5$
Umstellen: $-2x^2 + x + 3 = 0$
Lösen der quadr. Gleichung $x_1 = 1{,}5;\ x_2 = -1$
Bestimmung der Schnittpunkte: $f(1{,}5) = g(1{,}5) = 5; f(-1) = g(-1) = 0$
$\Rightarrow S_1(1{,}5\|5); S_2(-1\|0)$