Mathematik am Peutinger-Gymnasium

Zahl 18 **Grundwissen**

Logarithmus und Exponentialgleichung (Jgst. 10)

Der Logarithmus wird benötigt, um eine Exponentialgleichung nach x, also dem Exponenten, aufzulösen.

Es gilt: $a^x = b \Leftrightarrow x = log_a b$

Beispiel: $2^9 = 512 \Leftrightarrow 9 = log_2 512$

$log_a b$ ist damit diejenige Hochzahl, mit der a potenziert werden muss, um b zu erhalten.
Es gilt deswegen: $a^{log_a b} = b$

Besondere Werte	$log_a a = 1$	denn $a^1 = a$	$log_{a^{\frac{1}{a}}} = -1$	denn $\frac{1}{a} = a^{-1}$
	$log_a 1 = 0$	denn $a^0 = 1$	$log_a(a^c) = c$	denn $a^c = a^c$

Rechenregeln für Logarithmen	$log_a(u \cdot v) = log_a u + log_a u$ $log_a(u : v) = log_a u - log_a u$ $log_a u^x = x \cdot log_a u$

Zwei Lösungsstrategien für Exponentialgleichungen:

$a^x = b \Leftrightarrow log_a b = x$ Man formt die Gleichung so weit um, dass man die Form $a^x = b$ erhält und wendet die Definition des Logarithmus an.

Beispiel 2

$3 \cdot 5^{2x} = 2^{x+3}$ Rechenregeln für Potenzen anwenden

$3 \cdot (5^2)^x = 2^x \cdot 2^3 \quad |:3$ Faktoren ohne Exponent auf eine Seite

$(5^2)^x = \frac{2^x \cdot 2^3}{3} \quad |:2^x$ Faktoren mit Exponent auf die andere Seite

$\frac{(5^2)^x}{2^x} = \frac{2^3}{3}$ Rechenregel für Potenzen anwenden

$\left(\frac{5^2}{2}\right)^x = \frac{2^3}{3}$ Definition Logarithmus verwenden

$x = log_{\frac{5^2}{2}} \frac{2^3}{3}$ TR-Eingabe

$x \approx 0{,}39$

$a^x = b \Leftrightarrow lga^x = lgb$ Man logarithmiert jeweils die Terme auf beiden Seiten; Basis beliebig

Beispiel 1

$2{,}5 \cdot 3^x = 5 \cdot 2^x$ Logarithmieren

$lg(2{,}5 \cdot 3^x) = lg(5 \cdot 2^x)$ Rechenregel für Logarithmen anwenden

$lg(2{,}5) + lg(3^x) = lg(5) + lg(2^x)$ Rechenregel für Logarithmen anwenden

$lg(2{,}5) + xlg(3) = lg(5) + xlg(2) \quad |-xlg(3) - lg(5)$ Summand ohne Variable auf die eine Seite; mit auf die andere

$lg(2{,}5) - lg(5) = xlg(2) - xlg(3)$ Variable ausklammern

$lg(2{,}5) - lg(5) = x(lg(2) - lg(3))$

$(lg(2{,}5) - lg(5)) : (lg(2) - lg(3)) = x \quad |: (lg(2) - lg(3))$ Durch Koeffizienten dividieren

$x \approx 1{,}71$ TR-Eingabe

Aufgaben

1) Bestimme x (ohne TR):
a) $0{,}001^x = 0{,}1$ b) $1{,}4^x = 1{,}96$ c) $5^x = \frac{1}{625}$

2) Bestimme die Zahl a, die folgende Gleichung erfüllt, ohne Verwendung des TR.
a) $log_a 16 = 2$ b) $log_a 0{,}5 = 4$ c) $log_a(-9) = 2$ d) $log_a 16 = 0$

3) Vereinfache durch Anwendung der Rechengesetze ohne Verwendung des TR.
a) $log_3(9^{-11}) + log_{11}(\sqrt{11}) - log_{5,8}(1) + log_{216}(\frac{1}{36})$

4) Bestimme die Lösungen der Gleichung.
a) $5^{2x-1} = 125$ b) $2^{2x} = 7^{x-1}$

Lösungen

1) Bestimme x (ohne TR):

a) $x = log_{0,001}0{,}1$ $= log_{0,001}0{,}001^{\frac{1}{3}}$ $= \frac{1}{3} \cdot log_{0,001}0{,}001$ $= \frac{1}{3}$	b) $x = log_{1,4}1{,}96$ $= log_{1,4}1{,}4^2$ $= 2$	c) $x = log_5 625^{-1}$ $= log_5 25^{-2}$ $= log_5 5^{-4}$ $= -4$

2) Bestimme die Zahl a ohne Verwendung des TR, die folgende Gleichung erfüllt:

a) $a^2 = 16 \rightarrow a = 4$	b) $a^4 = 0{,}5 \rightarrow a = \sqrt[4]{0{,}5}$	c) $gibt\ es\ nicht, da\ b = -9$ $\rightarrow nicht\ definiert$	d) $gibt\ es\ nicht, da$ $a^0 = 1 \neq 16$

3) Vereinfache durch Anwendung der Rechengesetze ohne Verwendung des TR:

a) $log_3(9^{-11}) + log_{11}(\sqrt{11}) - log_{5,8}(1) + log_{216}(\frac{1}{36})$

$= log_3(3^{-22}) + log_{11}\left(11^{\frac{1}{2}}\right) - 0 + log_{6^3}(6^{-2})$

$= -22 + \frac{1}{2} - 0 + log_{6^3}(6^3)^{-\frac{2}{3}}$

$= -22 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}$

$= -22\frac{1}{6}$

4) Bestimme die Lösungen der Gleichung.

a) $x = 2$	b) $x = log_{\frac{7}{4}}7$