Mathematik am Peutinger-Gymnasium

Fkt 11 **Grundwissen**

Gebrochen-rationale Funktionen (Jgst. 11)

Elementare gebrochen-rationale Funktionen $\boldsymbol{y = \frac{a}{x+b} + c}$; $D = \mathbb{R}\backslash\{-b\}$ (siehe GRUWI Fkt 3)

Einfache gebrochen-rationale Funktionen der Form $\boldsymbol{y = \frac{p(x)}{q(x)}}$; $D = \{x|q(x) \neq 0\}$

p und q sind dabei Polynome vom Zählergrad $z \geq 0$ bzw. Nennergrad $n \geq 1$.

Definitionsbereich: $D = \{x|q(x) \neq 0\}$; erlaubt sind alle x-Werte, für die der Nenner nicht Null ergibt. Nennernullstellen heißen Definitionslücken.

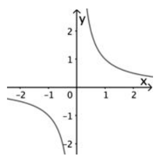
Nullstellen: Die Nullstellen einfacher gebrochen-rationaler Funktionen ergeben sich aus den Nullstellen des Zählers (D beachten).
Anhand der Vielfachheit der Zählernullstellen kann man ablesen, ob der Graph die x-Achse berührt oder schneidet (siehe ganz-rat. Funktionen, GRUWI Fkt 8)

Verhalten für $\boldsymbol{x \to \pm\infty}$:
Das Verhalten im Unendlichen kann anhand der Grade von Zähler- bzw Nennerpolynom bestimmt werden:

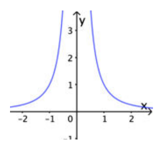
Konvergenz		Bestimmte Divergenz	
$\boldsymbol{z < n}$	$\boldsymbol{z = n}$	$\boldsymbol{z = n+1}$	$\boldsymbol{z > n}$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x}{x^2-1}\right) = 0$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2}{3x^2-1}\right) = \frac{2}{3}$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2+2}{x-4}\right) = \pm\infty$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^4+2}{x-4}\right) = \pm\infty$
Graphische Deutung: Der zugehörige Graph hat eine waagrechte Asymptote.		Graphische Deutung: Der zugehörige Graph hat eine schräge Asymptote.	

Verhalten an den Definitionslücken:

(1) Eine Definitionslücke x_0 heißt Polstelle, wenn gilt: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$.



Der Graph hat dort eine senkrechte Asymptote.
Liegt eine Nennernullstelle mit ungerader Vielfachheit vor, so ist x_0 Polstelle mit Vorzeichenwechsel.
Liegt eine Nennernullstelle mit gerader Vielfachheit vor, so ist x_0 Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

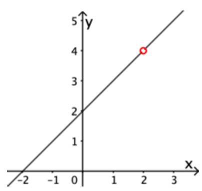


Beispiel: $f(x) = \frac{-2x(x+1)}{(x-1)^2}$ mit $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

Polstelle: $(x-1)^2 = 0$, wenn $x = 1$ doppelte VFH, also Polstelle ohne VZW.

Bestimmung der Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to 1-}\frac{\overbrace{-2x}^{-2}\overbrace{(x+1)}^{+2}}{\underbrace{(x-1)^2}_{0+}} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+}\frac{\overbrace{-2x}^{-2}\overbrace{(x+1)}^{+2}}{\underbrace{(x-1)^2}_{0+}} = -\infty$

(2) Eine Definitionslücke heißt stetig hebbar, wenn $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = a;\ a \in \mathbb{R}$



In diesem Fall hat der Graph ein „Loch". Dies kommt zustande, wenn x_0 zugleich Zähler- und Nennernullstelle ist und der Faktor $(x - x_0)$ aus dem Nenner gekürzt werden kann.

Beispiel: $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2$ wobei gilt: $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$, also $x_0 = 2$

und $\lim\limits_{x\to 2-}(x+2) = \lim\limits_{x\to 2+}(x+2) = 4$

Einfache gebrochen-rationale Funktionen „in Summenform“

Manchmal ist der Funktionsterm einer gebrochen-rationalen Funktion in **Summenform** vorgegeben, z.B. $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$. Für $x \to \pm\infty$ wird der Bruchterm verschwindend klein und nur der (hier) lineare Term ist noch von Bedeutung.

Mithilfe der Summenform kann der Term der Asymptote bestimmt werden.

Konvergenz		Bestimmte Divergenz	
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x} + 0\right) = 0$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2x}\right) = \frac{2}{3}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x} + 3x - 1\right) = \pm\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x} + x^2\right) = \pm\infty$
waagrechte Asymptote $y = 0$ bzw. $y = \frac{2}{3}$		schräge Asymptote $y = 3x - 1$	Annäherung an eine Parabel $y = x^2$

Aufgaben:

Gegeben sind die Funktionen a, b, c mit

$a(x) = \frac{x^2-4x+3}{3x-6}$ $\qquad b(x) = \frac{x^3-2x^2}{(x-3)(x+1)^2}$ $\qquad c(x) = \frac{1}{3}x + 1 - \frac{5}{3(x-1)}$;

a) Geben Sie die maximale Definitionsmenge an und bestimmen Sie die Nullstellen.

b) Bestimmen Sie das Verhalten im Unendlichen.

c) Bestimmen Sie das Verhalten an den Polstellen.

Lösungen:

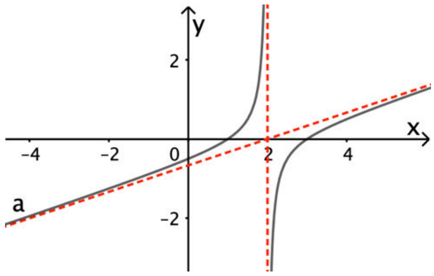
Funktion a:

a) $a(x) = \frac{x^2-4x+3}{3x-6} = \frac{(x-3)(x-1)}{3(x-2)}$; $D_a = \mathbb{R}\backslash\{2\}$; Nullstellen $x = 1$ und $x = 3$ (Lösungsformel nutzen!)

b) Verhalten im Unendlichen: Zählergrad 2 > Nennergrad 1.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-4x+3}{3x-6} = -\infty$ (Zähler pos., Nenner neg.);

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-4x+3}{3x-6} = \infty$ (Zähler pos., Nenner neg.)



c) Verhalten an den Polstellen:

$$\lim_{x\to2-} \frac{\overbrace{x^2-4x+3}^{-1}}{\underbrace{3(x-2)}_{0-}} = +\infty;\ \lim_{x\to2+} \frac{\overbrace{x^2-4x+3}^{-1}}{\underbrace{3(x-2)}_{0+}} = -\infty$$

Funktion b:

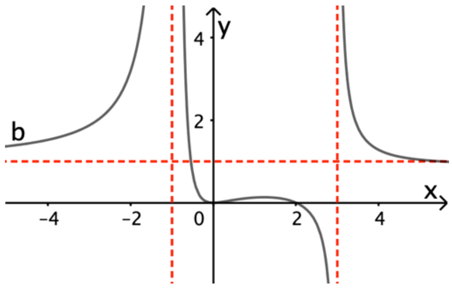
a) $b(x) = = \frac{x^2(x-2)}{(x-3)(x+1)^2}$; $D_b = \mathbb{R}\backslash\{-1; 3\}$; Nullstellen $x = 0$ (doppelt)und $x = 2$ (einfach)

b) Verhalten in Unendlichen: Zählergrad 3 = Nennergrad 3; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3-2x^2}{(x-3)(x+1)^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3-2x^2}{x^3+\cdots} = \frac{1}{1} = 1$

c) Verhalten an den Polstellen:

$\lim\limits_{x\to3-} \frac{\overbrace{x^3-2x^2}^{+9}}{\underbrace{(x-3)}_{0-}\underbrace{(x+1)^2}_{16}} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to3+} \frac{\overbrace{x^3-2x^2}^{+9}}{\underbrace{(x-3)}_{0+}\underbrace{(x+1)^2}_{16}} = +\infty$ mit VZW, da einfache Nennernullstelle!

$\lim\limits_{x\to1-} \frac{\overbrace{x^3-2x^2}^{-1}}{\underbrace{(x-3)}_{-2}\underbrace{(x+1)^2}_{0+}} = +\infty = \lim\limits_{x\to1+} \frac{\overbrace{x^3-2x^2}^{-1}}{\underbrace{(x-3)}_{-2}\underbrace{(x+1)^2}_{0+}}$ Polstelle ohne VZW, da VFH 2 der Nennernullstelle



Funktion c:

a) $c(x) = \frac{1}{3}x + 1 - \frac{5}{3(x-1)}$; $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$; Nullstellen 2 und -4 (Bruchgleichung lösen)

b) Summenform: schräge Asymptote $y = \frac{1}{3}x + 1$ steigend:

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{3}x + 1 - \frac{5}{3(x-1)}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{3}x + 1\right) = -\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3}x + 1 - \frac{5}{3(x-1)}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3}x + 1\right) = +\infty$

$$\frac{1}{3}x + 1 - \frac{5}{3(x-1)} = 0$$
$$\frac{1}{3}x + 1 = \frac{5}{3(x-1)}$$
$$\left(\frac{1}{3}x + 1\right)(3x-3) = 5$$
$$x^2 + 2x - 3 = 5$$
$$x^2 + 2x - 8 = 0 \iff x = 2 \; oder \; x = -4$$

c) Summenform:

$$\lim_{x\to1-} \left(\underbrace{\frac{1}{3}x + 1}_{\frac{4}{3}} - \underbrace{\frac{5}{3(x-1)}}_{0-}\right) = +\infty;$$

$$\lim_{x\to1+} \left(\underbrace{\frac{1}{3}x + 1}_{\frac{4}{3}} - \underbrace{\frac{5}{3(x-1)}}_{0+}\right) = -\infty$$

einfache Polstelle, daher mit VZW