Mathematik am Peutinger-Gymnasium

Fkt 13 **Grundwissen**

Anwendung der Ableitung (Jgst. 11)

Monotonie	***f*'(x)** > 0	G_f ist streng monoton steigend / die Funktion *f* nimmt zu
	***f*'(x)** < 0	G_f ist streng monoton steigend / die Funktion *f* nimmt ab
Extremstellen	***f*'(a)** = 0 und ***f*''(a)** > 0 *oder* ***f*'(a)** = 0 mit VZW von – nach +	G_f hat einen lokalen Tiefpunkt (TIP) / die Funktion *f* hat ein lokales Maximum an der Stelle a
	***f*'(a)** = 0 und ***f*''(a)** < 0 *oder* ***f*'(a)** = 0 mit VZW von + nach -	G_f hat einen lokalen Hochpunkt (HOP) / die Funktion *f* hat ein lokales Minimum an der Stelle a
Terrassenpunkt	***f*'(x)** = 0 OHNE VZW	G_f hat einen Terrassenpunkt (TEP)
Krümmung	***f*''(x)** > 0	G_f ist linksgekrümmt
	***f*'(x)** < 0	G_f ist rechtsgekrümmt
Wendestelle	***f*''(a)** = 0 mit VZW *oder* ***f*''(a)** = 0 und *f*'''(a) ≠ 0	G_f hat einen Wendepunkt (WP); die Funktion hat an der Stelle a eine Wendestelle
Steigungswinkel	***tan (α) = m = f*'(x)**	Schnittwinkel der Geraden *y = mx + t* mit der x-Achse
Newtonformel	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	Nullstellenbestimmung mit einem Startwert x_n

Beispielaufgabe:

Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$; $D_f = \mathbb{R}$. Ihr Graph sei G_f.

a) Bestimmen Sie Lage und Art der Extrem- und/oder Terrassenpunkte.

b) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an G_f im Punkt P (-1| *f* (-1)). Berechnen Sie den Schnittwinkel dieser Tangente mit der x-Achse.

c) Bestimmen Sie nachvollziehbar die Wertemenge von *f*.

LÖSUNG:

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1 \quad \Rightarrow f'(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x = x\left(x^2 + \frac{1}{2}x - 3\right) =$
$x(x+2)(x-1{,}5)$

Horizontale Tangenten bei $x_1 = 0$; $x_2 = -2$; $x_3 = 1{,}5$;

Monotonietabelle:

	x < −2	−2 <x < 0	0 < x < 1,5	1,5 < x
x	–	–	+	+
x + 2	–	+	+	+
x – 1,5	–	–	–	+
f '	–	+	–	+
G_f	smf	sms	smf	sms
	$TIP\ (-2;\ -2\frac{1}{3})$	$HOP\ (0;1)$	$TIP(1{,}5;-\frac{35}{64})$	

Kein Terrassenpunkt

b) $f(-1) = -\frac{5}{12}$

$f'(-1) = 2{,}5 \quad \Rightarrow -\frac{5}{12} = 2{,}5 \cdot (-1) + t \quad \Rightarrow t = 2\frac{1}{12}$

Tangente t: $y = 2{,}5x + 2\frac{1}{12}$; aus $\tan \alpha = 2{,}5 \Rightarrow \alpha = 68{,}2°$

c) $W = \left[-2\frac{1}{3};\ +\infty\right[$, da TIP $(-2|-2\frac{1}{3})$ globaler Tiefpunkt ist und die Funktion für $x \rightarrow \pm\infty$ gegen ∞ strebt.

Aufgaben

1. Kurvendiskussion

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x^2$, $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) Berechnen Sie die Nullstellen von f.

b) Bestimmen Sie die Extrempunkte und das Monotonieverhalten von G_f.

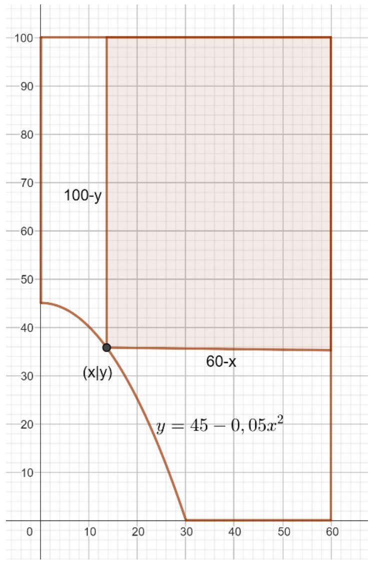
c) Bestimmen Sie die Wendepunkte und das Krümmungsverhalten von G_f.

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Normalen im Wendepunkt sowie den Steigungswinkel, den diese mit der x-Achse einschließt.

2. Extremwertprobleme

An einer wertvollen Glasscheibe ist ein Stück abgebrochen, das mithilfe einer quadratischen Funktion f mit $f(x) = 45 - 0{,}05 \cdot x^2$ modelliert werden kann.

Aus dem Rest kann aber noch ein rechteckiges Flächenstück abgeschnitten werden. Ermitteln Sie rechnerisch, wie geschnitten werden muss, damit dessen Fläche maximal ist.

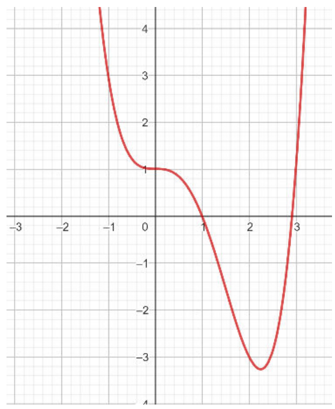


3. Newton-Verfahren

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + 1$.

a) Bestimmen Sie die beiden Nullstellen von f mit dem Newton-Verfahren auf eine Dezimale genau.

b) Erläutern Sie, warum man $x_0 = 0$ nicht als Startwert wählen kann und warum man zur Annäherung der linken Nullstelle den Startwert nicht im Intervall $]2{,}25; \infty[$ wählen darf.



Lösungen:

1. (Kurvendiskussion)

a) Nullstellen: $f(x) = 0$

$x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 3$

b) Extrempunkte und Monotonieverhalten: $f'(x) = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 2$

Monotonietabelle:

x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f'(x)$	+	0	$-$	0	+
G_f	sms	HOP(0|0)	smf	TIP(2|-4)	sms

Alternative mit der 2. Ableitung:

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(0) = -6 < 0 \Rightarrow$ Rechtskrümmung, also HOP(0|0)

$f''(2) = 6 > 0 \Rightarrow$ Linkskrümmung, also TIP(2|-4)

c) Wendepunkte und Krümmungsverhalten: $f''(x) = 0$

$f''(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$

Krümmungstabelle:

x	$x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f''(x)$	$-$	0	+
G_f	rechtsgekrümmt	WEP(1|-2)	linksgekrümmt

Alternative mit der 3. Ableitung:

$f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(1) \neq 0 \Rightarrow$ WEP(1|-2)

d) Normalengleichung im WEP und Steigungswinkel:

Es gilt: $m_t \cdot m_n = -1$, d.h. $m_n = \frac{-1}{m_t} = \frac{-1}{f'(1)} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$

→ Normalengleichung: $y = m_n \cdot x + t$

WEP(1|-2) einsetzen und nach t auflösen: $-2 = \frac{1}{3} \cdot 1 + t \rightarrow t = -2\frac{1}{3}$

→ Normalengleichung: $y = \frac{1}{3} \cdot x - 2\frac{1}{3}$

Steigungswinkel der Normalen mit der x-Achse: $\tan(\alpha) = m_n = \frac{1}{3} \rightarrow \alpha \approx 18{,}43°$

2. (Extremwertproblem)

Der Flächeninhalt A des Rechteckts ergibt sich aus:

$A(x,y) = (60 - x)(100 - y)$

Nach Einsetzen der Funktionsgleichung

$y = 45 - 0{,}05 \cdot x^2$ ergibt sich:

$A(x) = (60 - x)(55 + 0{,}05x^2)$

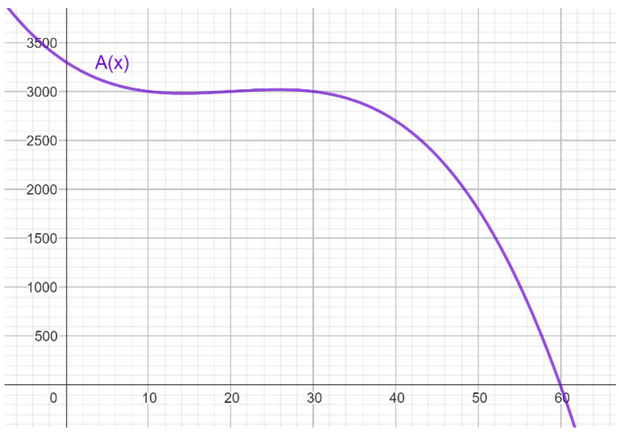
$\quad = 3300 - 55x + 3x^2 - 0{,}05x^3$

$A'(x) = -55 + 6x - 0{,}15x^2$

$A''(x) = 6 - 0{,}3x$

Notwendige Bedingung: $A'(x) = 0$

→ Mitternachtsformel liefert: $x_1 \approx 14{,}23$ und $x_2 \approx 25{,}77$



Hinreichende Bedingung: $A''(x) \neq 0$

$A''(14{,}23) > 0 \rightarrow$ lokales Minimum

$A''(25{,}77) < 0 \rightarrow$ lokales Maximum

Es gilt: $A(25{,}77) = 3019$

Die Funktion hat jedoch am Rand der Definitionsmenge $D_f = [0; 60]$ einen noch größeren Funktionswert (ein globales/absolutes Maximum): $A(0) = 3300$, d.h. das größte Flächenstück erhält man, wenn man nur den unbeschädigten oberen Teil der Glasplatte absägt.

3. (Newton-Verfahren)

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + 1$ und $f'(x) = 2x^3 - \frac{9}{2}x^2$

Startwert: $x_0 = 1$

	A	B	C	D	E
1	n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
2	0	1,0000000	0,0000000	−2,5000000	1,0000000
3	1	1,0000000	0,0000000	−2,5000000	1,0000000

➔ Nullstelle: $x_1 = 1{,}0$

Startwert: $x_0 = 3$

	A	B	C	D	E
1	n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
2	0	3,0000000	1,0000000	13,5000000	2,9259259
3	1	2,9259259	0,0722601	11,5732612	2,9196822
4	2	2,9196822	0,0004869	11,4174712	2,9196396

➔ Nullstelle: $x_2 = 2{,}9$

b) Für die Ableitung f‘ gilt: $f'(x) = 2x^3 - \frac{9}{2}x^2$

Für den Startwert $x_0 = 0$ ergibt sich $f'(x) = 0$.
Da die Newton-Formel $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ lautet, würde man im 1. Schritt des Newton-Verfahrens im Nenner den Wert 0 erhalten. Anschaulich erklärt hat der Graph von f für den Startwert $x_0 = 0$ eine waagrechte Tangente, da dort ein Terrassenpunkt des Graphen vorliegt. Die Tangente verläuft also parallel zur x-Achse und schneidet diese nicht. Somit ergibt sich kein weiterer Näherungswert für die Nullstelle.
Für $x_0 = 2{,}25$ ergibt sich ebenfalls $f'(2{,}25) = 0$. An dieser Stelle hat der Graph einen Tiefpunkt und ebenfalls eine waagrechte Tangente.
Für alle Werte $x \in]2{,}25; \infty[$ ergeben sich Tangenten mit positiver Steigung, mit denen nur die rechte Nullstelle angenähert werden kann.