

Eigenschaften von Funktionen (Jgst. 11)

Symmetrie

Der Graph einer Funktion f ist **achsensymmetrisch zur y-Achse**, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D_f$. Die Funktion f heißt dann gerade Funktion.

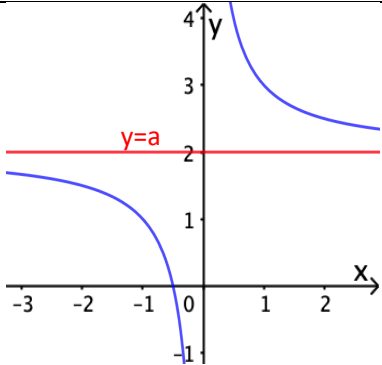
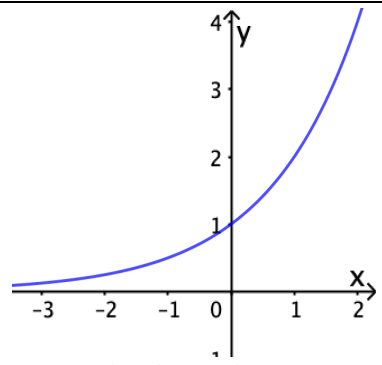
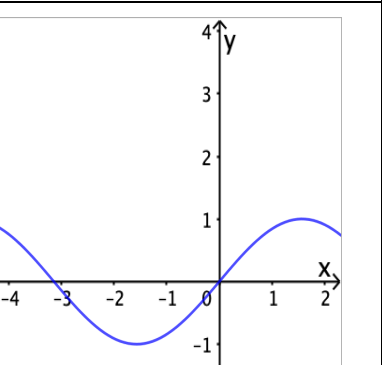
Der Graph einer Funktion f ist **punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems**, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D_f$. Die Funktion f heißt dann ungerade Funktion.

Bei ganzrationalen Funktionen lässt sich die Symmetrie des Graphen anhand der vorkommenden Exponenten des Terms ablesen (siehe auch Grundwissensblatt Fkt 09).

Beispiel: $g(x) = x^3 \cos(x)$: $g(-x) = (-x)^3 \cos(-x) = -x^3 \cos(x) = -g(x)$.
Daher ist der Graph von g punktsymmetrisch zum Ursprung.

Grenzwerte für $x \rightarrow \pm\infty$

Wir unterscheiden drei Arten, wie sich Funktionen für sehr große bzw. sehr kleine x -Werte verhalten:

Konvergenz	Bestimmte Divergenz	Unbestimmte Divergenz
Für $x \rightarrow \infty$ nähern sich die Funktionswerte einer bestimmten Zahl an: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$	Für $x \rightarrow \infty$ werden die Funktionswerte immer größer/ kleiner: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$	Für $x \rightarrow \infty$ ist kein bestimmter „Trend“ vorhersagbar, die Funktionswerte schwanken: es existiert kein Grenzwert
		
Der Graph hat eine waagrechte Asymptote.	Der Graph geht „nach oben/unten“.	
Beispiel: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + 2\right) = 2$	Beispiel: $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x = \infty$	Beispiel: $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x)$ existiert nicht.

Bei gebrochen-rationalen Funktionen mit dem Term $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ (p und q sind Polynome vom Zählergrad z bzw. Nennergrad n) kann das Verhalten im Unendlichen anhand der Grade von Zähler- bzw. Nennerpolynom bestimmt werden:

Konvergenz		Bestimmte Divergenz	
$z < n$	$z = n$	$z = n + 1$	$z > n + 1$
$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x^2 - 1}\right) = 0$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{3x^2 - 1}\right) = \frac{2}{3}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^2 + 2}{x - 4}\right) = \pm\infty$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^4 + 2}{x - 4}\right) = \pm\infty$
Die Funktionswerte nähern sich 0 bzw. $\frac{2}{3}$ an. Der zugehörige Graph hat eine waagrechte Asymptote.	Die Funktionswerte werden immer größer. Der zugehörige Graph hat eine schräge Asymptote.	Die Funktionswerte werden immer größer.	Die Funktionswerte werden immer größer.

Einfluss von Parametern auf den Funktionsgraphen

$f(x) + d$	Der Graph von f wird um d entlang der positiven y-Achse verschoben.
$a \cdot f(x)$	Der Graph von f wird mit dem Faktor $ a $ in Richtung y-Achse gestreckt. Ist $a < 0$, so wird er zudem an der x-Achse gespiegelt.
$f(x + c)$	Der Graph von f wird um $-c$ entlang der positiven x-Achse verschoben.
$f(b \cdot x)$	Der Graph von f wird mit dem Faktor $\left \frac{1}{b}\right $ in Richtung x-Achse gestreckt. Ist $b < 0$, so wird er zudem an der y-Achse gespiegelt.

$$g(x) = a \cdot f(b \cdot (x + c)) + d$$

Achtung: Bei einer Kombination von Transformationen muss darauf geachtet werden, dass Streckungen und Spiegelungen vor den Verschiebungen ausgeführt werden müssen!

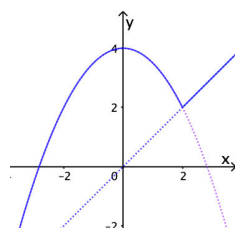
Beispiel $g(x) = 1,5 \cdot f\left(-\frac{1}{2} \cdot (x - 3)\right) + 4$

G_g entsteht aus G_f durch Streckung mit dem Faktor 2 in x-Richtung, Spiegelung an der y-Achse und Streckung mit dem Faktor 1,5 in y-Richtung. Anschließend wird um 3 in positive x-Richtung und 4 in positive y-Richtung verschoben.

Stetigkeit

Eine Funktion, deren Graph in einem Intervall I gezeichnet werden kann, ohne den Stift abzusetzen, heißt stetig auf dem Intervall I . Alle bekannten Funktionstypen sind stetig auf ihrem Definitionsbereich. Interessant sind beispielsweise die Nahtstellen abschnittsweise definierter Funktionen.

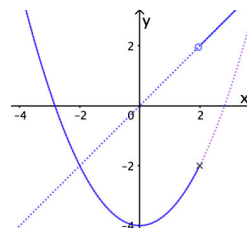
(1) $f: x \mapsto \begin{cases} 4 - \frac{1}{2}x^2 & \text{für } x \leq 2 \\ x & \text{für } x > 2 \end{cases}$



An der Stelle $x = 2$ ist f stetig, da die Graphen der Teilstücke nahtlos ineinander übergehen:

$$f(2) = 4 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 2$$

(2) $g: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 4 & \text{für } x \leq 2 \\ x & \text{für } x > 2 \end{cases}$



An der Stelle $x = 2$ ist g nicht stetig, da die Teilstücke des Graphen nicht aufeinander treffen:

$$g(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 4 = -2 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 2+} g(x) = 2$$

Aufgaben:

1. Untersuchen Sie rechnerisch, ob die Graphen der gegebenen Funktionen eine Symmetrie zum Koordinatensystem aufweisen.

a) $a(x) = -3x^4 \cdot \sin(x)$ b) $b(x) = \frac{2^x + 0,5^x}{4}$

c) $c(x) = 2x^4 - 2x^2 + 1$ d) $d(x) = 2x^3 - x + 1$

2. Geben Sie die Grenzwerte für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow +\infty$ an.

a) $a(x) = -3x^3$ b) $b(x) = -0,5^x + 1$ c) $c(x) = \frac{3x}{x^2 - 1}$

d) $d(x) = \frac{6(x-1)^2}{1-3x^2}$

3. Gegeben ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2$. Beschreiben Sie, wie der Graph von g aus dem Graphen von f entsteht und bestimmen Sie den Term von g .

a) $g(x) = 4f(-x)$

b) $g(x) = -f(x - 3) + 2$

c) $g(x) = -(f(x - 3) + 2)$

d) $g(x) = f(3(x + 1)) + 2$

e) $g(x) = f(3x - 1) + 2$

f) $g(x) = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{4}(x + 1)\right) - 1$

4. Bestimmen Sie b so, dass die Funktion f an der Nahtstelle ihrer beiden Äste stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + b & \text{für } x \leq -1 \\ 0,5x + 1 & \text{für } x > -1 \end{cases}$$

Lösungen:

1. a) $a(-x) = -3(-x)^4 \cdot \sin(-x) = -3x^4 \cdot (-\sin(x)) = 3x^4 \cdot \sin(x) = -a(x)$ p.s.
b) $b(-x) = \frac{2^{-x} + 0,5^{-x}}{4} = \frac{0,5^x + 2^x}{4} = \frac{2^x + 0,5^x}{4} = b(x)$ a.s.
c) $c(-x) = 2(-x)^4 - 2(-x)^2 + 1 = 2x^4 - 2x^2 + 1 = c(x)$ a.s.
d) $d(-x) = 2(-x)^3 - (-x) + 1 = -2x^3 + x + 1 \neq -d(x)$ keine Symmetrie zum KOSY

2. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} (-3x^3) = -\infty$
b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-0,5^x + 1) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} (-0,5^x + 1) = 1$
c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x}{x^2-1}\right) = 0$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{x^2-1}\right) = 0$ (Zählergrad < Nennergrad)
d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{6(x-1)^2}{1-3x^2}\right) = \frac{6}{-3} = -2$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6(x-1)^2}{1-3x^2}\right) = \frac{6}{-3} = -2$ (Zählergrad = Nennergrad)

3. G_g entsteht aus G_f durch

- a) Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 4 und Spiegelung an der y-Achse.
b) Spiegelung an der x-Achse und anschließende Verschiebung um 3 in positive x-Richtung und um 2 in positive y-Richtung.
c) Verschiebung um 3 in positive x-Richtung und um 2 in positive y-Richtung und anschließende Spiegelung an der x-Achse
d) Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{3}$ und anschließende Verschiebung um 1 in negative x-Richtung und um 2 in positive y-Richtung.
e) **Verschiebung um 1 in positive x-Richtung, Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{3}$** und anschließende und Verschiebung um 2 in positive y-Richtung. *Anm.: Hier ist eine andere Reihenfolge notwendig, wenn nicht vorher 3 ausgeklammert wird.*

Alternativ: Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{3}$ und anschließende Verschiebung um $\frac{1}{3}$ in

positive x-Richtung und um 2 in positive y-Richtung: $g(x) = f\left(3\left(x - \frac{1}{3}\right)\right) + 2$

- f) Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$, Streckung in x-Richtung mit dem Faktor 4 und anschließende Verschiebung um 1 in negative x-Richtung und um 1 in negative y-Richtung.

Terme:

- a) $g(x) = 4(-x)^2 = 4x^2$ d) $g(x) = 9(x+1)^2 + 3$
b) $g(x) = -(x-3)^2 + 2$ e) $g(x) = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 2$
c) $g(x) = -((x-3)^2 + 2) = -(x-3)^2 - 2$ f) $g(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}(x+1)\right)^2 - 1 = \frac{1}{32}(x+1)^2 - 1$

4. linker Ast: $f(-1) = (-1)^2 + b = 1 + b$;
rechter Ast: $0,5 \cdot (-1) + 1 = 0,5$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + b & \text{für } x \leq -1 \\ 0,5x + 1 & \text{für } x > -1 \end{cases}$$

$$1 + b = 0,5 \Leftrightarrow b = -0,5$$