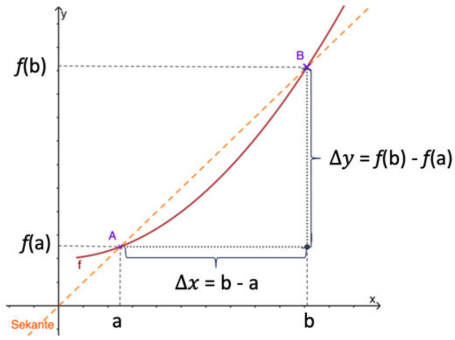
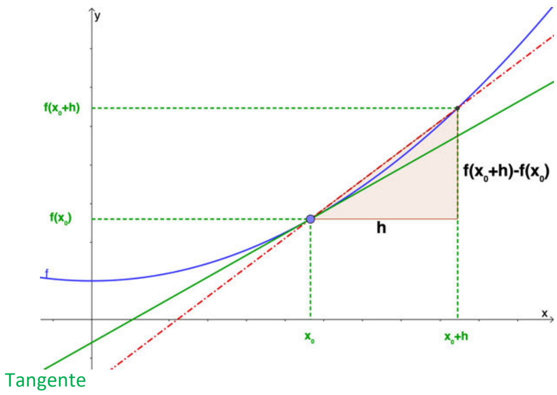
Mathematik am Peutinger-Gymnasium

Fkt 12 **Grundwissen**

Änderungsraten und Ableitung (Jgst. 11)



Die **mittlere Änderungsrate** $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ der Funktion *f* im Intervall [a;b] gibt die Steigung der Sekante durch die Punkte A(a|*f*(a)) und B (b|*f*(b)) an. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ heißt Differenzenquotient von *f* im Intervall [a;b].



Nähert sich der Wert des Differenzenquotienten $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ für $h \to 0$ von beiden Seiten einem festen Wert, so heißt dieser **Ableitung *f'*(x_0)**. Er gibt die **lokale Änderungsrate** der Funktion *f* an der Stelle x_0 an. Die Tangente an den Graphen der Funktion *f* im Punkt P ist definiert als die Gerade, die durch P(x_0|*f*(x_0)) läuft und die Steigung m = *f'*(x_0) besitzt. Unter der Steigung des Graphen der Funktion *f* versteht man die Steigung der Tangente in diesem Punkt.

Der Grenzwert des Differenzenquotienten $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ heißt ***Differentialquotient*** und entspricht ***f'*(x_0)**. Wenn $f'(x_0)$ existiert, dann heißt *f* an der Stelle x_0 **differenzierbar**.

Beispiele:

(1) Berechnen Sie für die Funktion *f* mit *f*(x) = $x^3 - 3x^2$ die mittlere Änderungsrate im Intervall [-2; 1].

$$\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)} = \frac{1^3-3\cdot 1^2-((-2)^3-3\,(-2)^2)}{3} = \frac{1-3-(-8-12)}{3} = \frac{-2+20}{3} = 6$$

(2) Ermitteln Sie die Steigung des Graphen G_f der Funktion *f* aus (1) im Punkt P (1|-2) mit der h-Methode sowie die Gleichung der Tangente in diesem Punkt.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3-3(1+h)^2-(1^3-3\cdot 1^2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1^3+3\cdot 1^2h+3h^2\cdot 1+h^3)-3(1^2+2\cdot 1\cdot h+h^2)-1^3+3\cdot 1^2}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(1+3\cdot h+3h^2+h^3)-3(1+2h+h^2)-1+3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1+3\cdot h+3h^2+h^3-3-6h-3h^2+2}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1+3\cdot h+3h^2+h^3-3-6h-3h^2+2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^3-3\cdot h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(h^2-3)}{h} = \lim_{h\to 0}(h^2-3) = -3 = m$$

Tangentengleichung

$y = mx + t$

$-2 = -3\cdot 1 + t$

$1 = t$

$y = -3x+1$

(3) Untersuchen Sie die Funktion k mit $k\colon x \mapsto \begin{cases} 4-\frac{1}{2}x^2 & \text{für } x \le 2 \\ x & \text{für } x > 2 \end{cases}$ auf Differenzierbarkeit an ihrer Nahtstelle.

$$\lim_{h\to 0}\frac{k(2+h)-k(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2+h-(4-\frac{1}{2}\cdot 2^2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2+h-2}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1 \text{ (rechtsseitiger GW)}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{k(2-h)-k(2)}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{4-\frac{1}{2}\cdot(2-h)^2-(4-\frac{1}{2}\cdot 2^2)}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{4-\frac{1}{2}\cdot(4-4h+h^2)-2}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{4-2+2h-\frac{1}{2}h^2-2}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2-\frac{1}{2}h)}{-h} =$$

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{(2-\frac{1}{2}h)}{-1} = \frac{2}{-1} = -2$ (linksseitiger GW), $-2 \neq 1$, d.h. k ist an der Nahstelle nicht differenzierbar, der Graph von k hat an der Stelle x = 2 einen „Knick".

Ableitungsregeln:

Für differenzierbare Funktionen g und h, sowie a, k ∈ ℝ gilt:

$f(x) = g(x) + a$	$f'(x) = g'(x)$	additive Konstante fällt beim Ableiten weg
$f(x) = k \cdot g(x)$	$f'(x) = k \cdot g'(x)$	multiplikative Konstante bleibt (Faktorregel)
$f(x) = g(x) + h(x)$	$f'(x) = g'(x) + h'(x)$	(Summenregel)

Für Potenzfunktionen gilt (n ∈ ℕ)

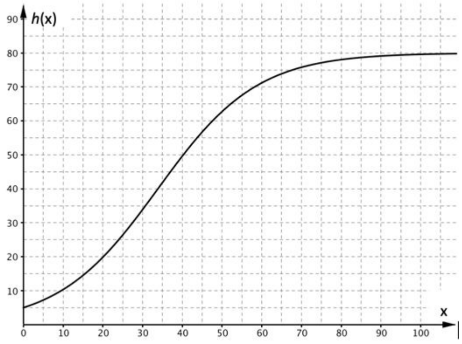
$f(x) = x^n$ **$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$**

Beispiel: Geben Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - 2x^3 + 4x - 6$ an.

$$f'(x) = \frac{3}{4} \cdot 4x^3 - 2 \cdot 3x^2 + 4 = 3x^3 - 6x^2 + 4$$

Aufgaben

1. Das Wachstum von Stangenbohnen der Sorte Megabohne lässt sich näherungsweise mithilfe der Funktion h beschreiben. Beginnt man die Beobachtung zwei Wochen nach der Auskeimung einer Stangenbohne dieser Sorte, so liefert $h(x)$ für $x \geq 0$ im Modell die Höhe der Bohnenranke in cm. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Tagen. Bestimmen Sie einen Wert für $\frac{h(40)-h(10)}{30}$ und deuten Sie den Wert mathematisch und im Sachzusammenhang.



2. Ermitteln sie die Gleichung der Tangente an den Funktionsgraphen im Punkt $P(a|f(a))$:
   a) $f(x) = x^2 - 2x + 3;\ a = 3$ b) $f(x) = x^3 - 2;\ a = 1{,}5$

3. Bestimmen Sie die Stellen, an denen der Graph der Funktion f die angegebene Steigung m hat.
   a) $f(x) = x^2 + x - 2;\ m = -1$ b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x;\ m = 0$

4. Untersuchen Sie die Funktion f mit $f\colon x \mapsto \begin{cases} -x + 3 & \text{für } x \leq 2 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$ auf Differenzierbarkeit an ihrer Nahtstelle.

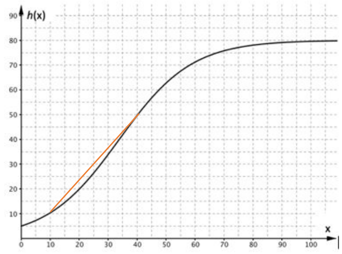
5. Geben Sie den Term einer Funktion h an, die am Punkt Q (–3|4) nicht differenzierbar ist.

Lösungen

1. Die mittlere Änderungsrate ist $\frac{h(40)-h(10)}{30} \approx \frac{50-11}{30} = \frac{39}{30} \approx 1{,}3$

   Die Steigung der Sekante durch (10|11) und (40|50) ist 1,3.

   Die Bohnenranke wächst vom 10. bis zum 40. Tag der Messung durchschnittlich 1,3 cm pro Tag.



2. a) $P(3|6)$; $f'(x) = 2x - 2; m = f'(3) = 4$

   Einsetzen in $y = mx + t$ und Auflösen nach t ergibt: $y = 4x - 6$

   b) $P(1{,}5|1{,}375)$; $f'(x) = 3x^2; m = f'(1{,}5) = 6{,}75$

   Einsetzen in $y = mx + t$ und Auflösen nach t ergibt: $y = 6{,}75x - 8{,}75$

3. Bestimmen Sie die Stellen, an denen der Graph der Funktion f die angegebene Steigung m hat.

   a) $f(x) = x^2 + x - 2;\ m = -1$

   $f'(x) = 2x + 1 = -1$

   $x = -1$

   b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x;\ m = 0$

   $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36 = 0$

   $x_1 = -3; x_2 = 2$

4. Es ist $f(2) = -2 + 3 = 1$

   Linksseitiger GW: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(2-h)-f(2)}{-h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{-(2-h)+3-1}{-h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h}{-h} = -1$

   Rechtsseitiger GW: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(2+h)^2-2(2+h)+1-1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{2h+h^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0}(2+h) = 2$

   d.h. f ist an der Nahstelle nicht differenzierbar, der Graph von f hat an der Stelle x = 2 einen „Knick“.

5. Einfachstes Beispiel für eine nicht-differenzierbare Funktion ist

   die Betragsfunktion mit der Gleichung $y = |x|$ (Graph f).

   Durch Verschiebung erreicht man, dass die „Knickstelle“ des

   Graphen im Punkt Q liegt: $y = |x + 3| + 4$. (Graph g)